

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)

Н. В. САВЧЕНКО

## СБОРНИК ЗАДАЧ

## ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Часть 2. Поверхности. Методика решения задач, входящих  
в состав графических работ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 24.03.04 Авиационное и ракетостроение и специальности 24.05.07 Самолето- и вертолетостроение

Самара  
Издательство Самарского университета  
2017

УДК 515(075)  
ББК 22.151.3

С 137

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. В. А. Антипов;  
д-р техн. наук, проф. В. В. Бирюк

*Савченко, Нелли Вячеславовна*

С137      **Сборник задач по начертательной геометрии. Часть 2. Поверхности. Методика решения задач, входящих в состав графических работ:** учеб. пособие / *Н.В. Савченко*. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2017. – 78 с.: ил.

**ISBN 978-5-7883-1358-0**

Во второй части учебного пособия рассматриваются поверхности, способы их образования, а также решение комплексных задач с ними.

К каждой теме даны краткие теоретические сведения, рассмотрены типовые примеры, дающие студентам представление о методике решения задач, задачи для самостоятельного решения студентами, приведены вопросы для самопроверки.

Пособие предназначено для использования студентами первого курса обучения при решении домашних работ, а также может быть полезна при подготовке к практическим занятиям и экзамену. Разработано для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств, 24.03.04 Авиационное и специальность 24.05.07 Самолето- и вертолетостроение, а также может быть полезно студентам всех специальностей, изучающим начертательную геометрию.

УДК 515(075)  
ББК 22.151.3

ISBN 978-5-7883-1358-0

© Самарский университет, 2017

# 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

## 1.1. Методика решения задач

В курсе «Начертательная геометрия» рассматриваются задачи различных типов: позиционные, метрические или комплексные. Однако к какому бы типу не относились конкретная задача, методику решения ее можно разбить на следующие этапы:

1. Проработка соответствующих теоретических разделов курса по учебнику<sup>1</sup>, конспекту лекций и данному пособию. Материал необходимо изучать последовательно, запоминая все понятия темы, определения и теоремы.
2. Анализ задачи.
3. Составление плана решения.
4. Выполнение решения на комплексном чертеже.
5. Проверка полученных результатов.

## 1.2. Состав индивидуального задания

Каждый студент в течение семестра должен выполнить индивидуальное задание, состоящее из набора задач и графических работ. Состав индивидуального задания определяется рабочей программой по начертательной геометрии для конкретной специальности. Номера задач или бланк с их графическими условиями (рис. 1.1) выдается на первом практическом занятии.

Индивидуальное задание состоит из двух частей:

1. Альбома задач.
2. Графических работ.

Ряд задач и графические работы необходимо выполнить не только с помощью классических методов начертательной геометрии, но и с применением трехмерного моделирования в системе КОМПАС-3D.

## 1.2. Порядок приема графических работ

Каждая часть индивидуального задания строго в установленные сроки передается на проверку. Преподаватель за правильно выполненную работу ставит отметку о ее зачете либо делает замечания, которые должны быть устранены.

На проверку принимаются полностью оформленные работы, выполненные с учетом требований, принятых на кафедре.

***При отсутствии зачетных графических работ и задач домашнего задания студент до экзамена не допускается!***

## 1.3. Требования к оформлению графических работ

1. *Графические работы (этюды)* выполняются на отдельных листах чертежной бумаги – ватман (рис.1.2) формата А3 (297 мм × 420 мм).
2. В правом нижнем углу формата располагается основная надпись. На чертежах, выполненных вручную используется основная надпись принятого на кафедре образца (рис. 1.2). В графе «Наименование» основной надписи указывается название графической работы, например, «Пересечение цилиндра с плоскостью» или «Пересечение конуса и тора». В графе «№ задачи» указывается номер графической работы (ГР1 или ГР 2)
3. Графическое условие располагается в правом верхнем углу листа (60х70 мм).

---

<sup>1</sup> Список рекомендованной литературы приведен в конце настоящего издания

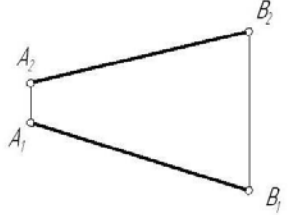
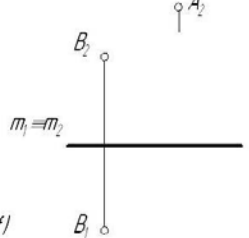
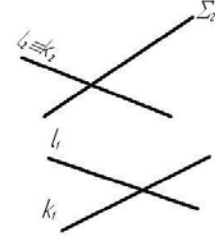
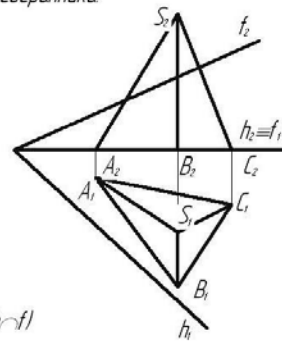
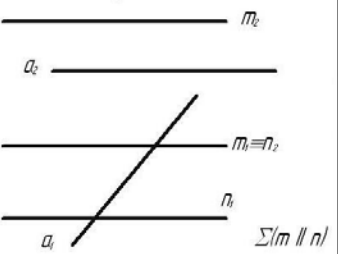
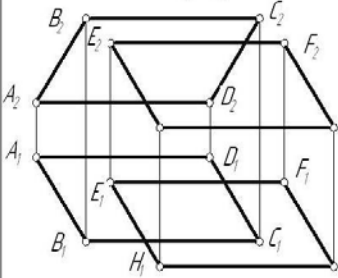
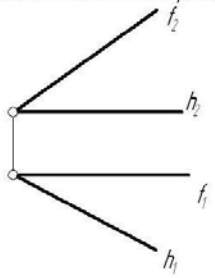
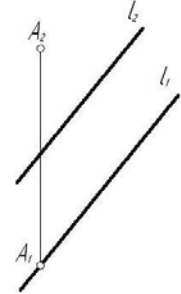
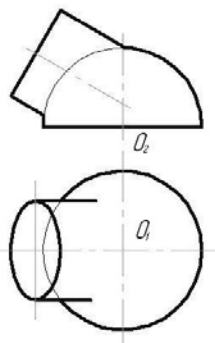
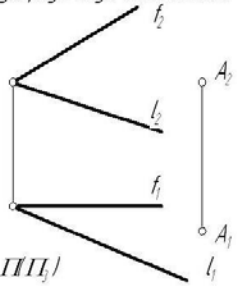
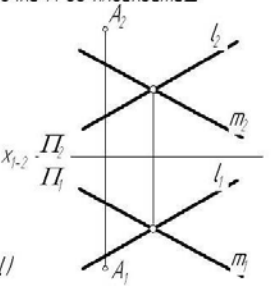
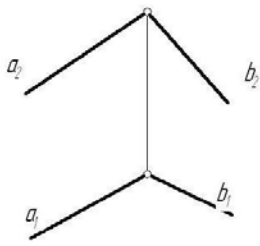
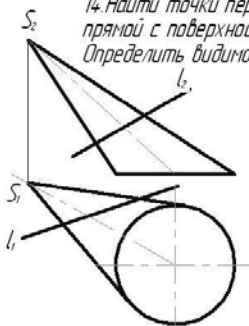
<p>T1. Метод прямоугольного треугольника T2. Принадлежность прямой и точки пл. T4. Пересечение плоскостей T5. Пересечение прямой и плоскости T6. Пересечение плоских фигур T7. Линия наибольшего наклона T8. Перпендикулярность прямой и плоск., перпендикулярность прямых общ. полож. T9. Перпендикулярность плоскостей T10. Метод замены плоскостей проекций T12. Плоско-параллельное перемещение T13. Вращение вокруг линии уровня T14. Пересечение прямой с поверхностью</p>	<p>T1. Определить натуральную величину отрезка АВ и угол наклона его к указанным плоскостям проекций</p>  <p><math>\kappa \Pi_2 \text{ и } \Pi_1</math></p>	<p>T2. Построить недостающую проекцию точки или прямой, принадлежащих плоскости.</p>  <p><math>\Sigma(h \cap f)</math></p>	<p>T4. Построить линию пересечения плоскостей</p>  <p><math>\Sigma \Sigma_2, l, \Theta(l \parallel k)</math></p>	<p>Графическая работа №1. Построить сечение многогранника плоскостью. Определить натуральную величину сечения. Показать видимость геометрических объектов. Построить развертку нижней отсеченной части многогранника.</p>  <p><math>\Sigma(h \cap f)</math></p>
<p>T5. Построить точку пересечения прямой с плоскостью. Показать видимость прямой.</p>  <p><math>\Sigma(m \parallel n)</math></p>	<p>T6. Построить линию пересечения заданных плоских фигур</p>  <p><math>G_1</math></p>	<p>T7. Определить угол наклона заданной пл. <math>\Sigma</math> к указанным плоскостям проекций</p>  <p><math>\Sigma(h \cap f)</math> <math>G_1 \kappa \Pi_1 \text{ и } \Pi_2</math></p>	<p>T8. Из точки А опустить перпендикуляр на прямую l</p> 	<p>Графическая работа №2. Построить линию пересечения поверхностей. Определить видимость</p> 
<p>T9. Через точку А провести плоскость, перпендикулярную двум плоскостям</p>  <p><math>\Theta(l \cap f) \text{ и } \Pi \Pi_1</math></p>	<p>T10. Определить расстояние от точки А до плоскости <math>\Sigma</math></p>  <p><math>\Sigma(m \cap l)</math></p>	<p>T12. Определить натуральную величину угла между пересекающимися прямыми</p> 	<p>14. Найти точки пересечения прямой с поверхностью. Определить видимость прямой</p> 	

Рис. 1.1. Образец бланка индивидуального задания



4. Все построения на чертежах, выполненных вручную, производятся карандашом с применением чертежных инструментов, выдерживая типы линий по ГОСТ 2.303-68. Линии построений должны быть сохранены.
5. При этом проекции заданных и найденных фигур вычерчиваются сплошными основными линиями (толщина 0,8 – 1,0 мм); невидимые линии – штриховые (толщина 0,3 – 0,5 мм); оси проекций, линии связи, линии вспомогательных построений – сплошные тонкие (толщина 0,3 – 0,5 мм), осевые и центровые линии – штрих-пунктирные (толщина 0,3 – 0,5 мм). Условия задач и все надписи выполняются стандартным шрифтом размера 3,5 мм.

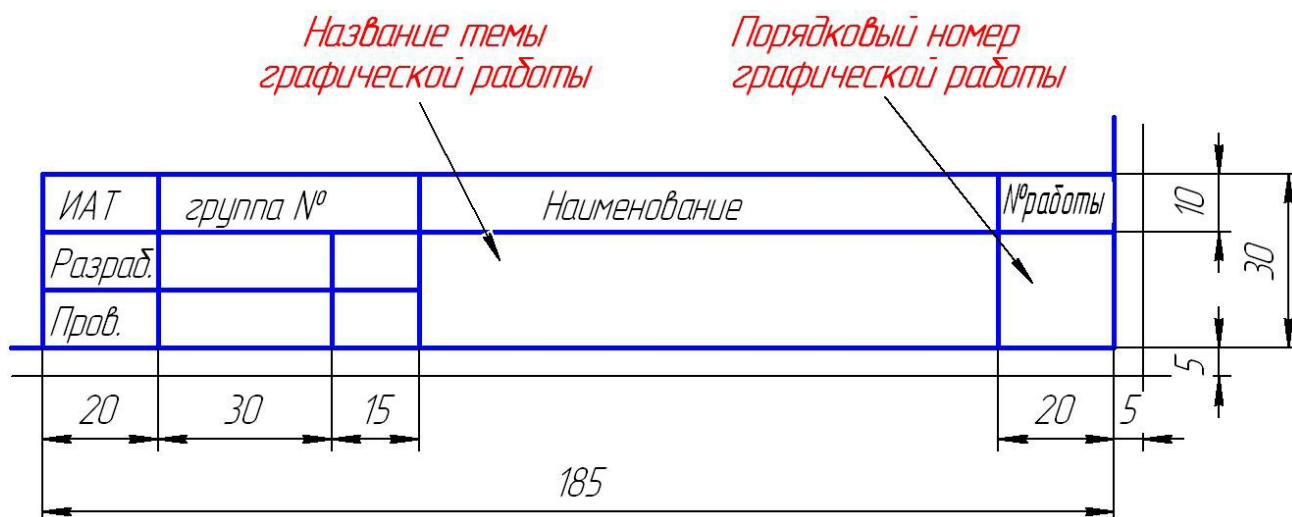


Рис. 1.2. Основная надпись

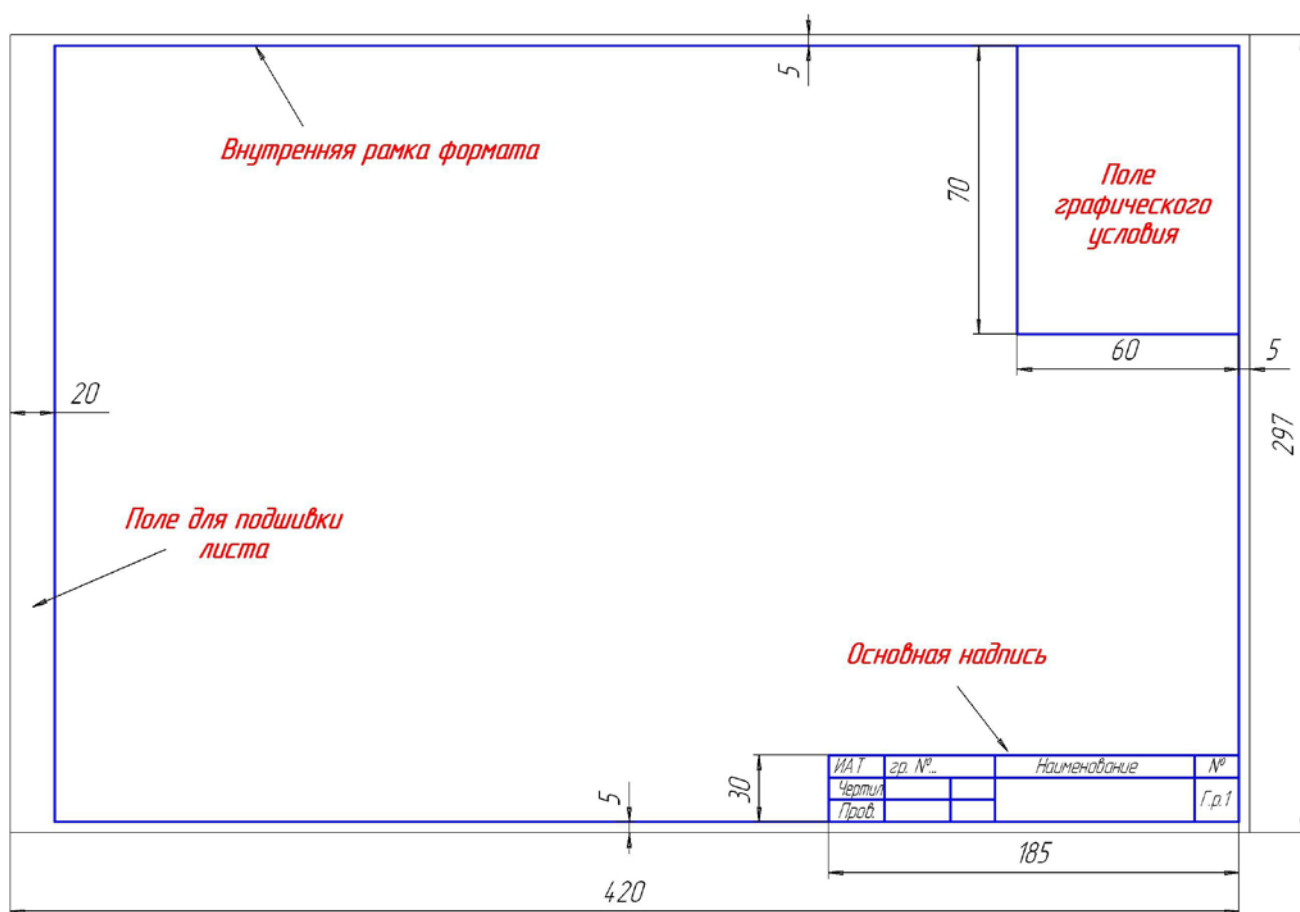


Рис. 1.3. Оформление листа формата А3

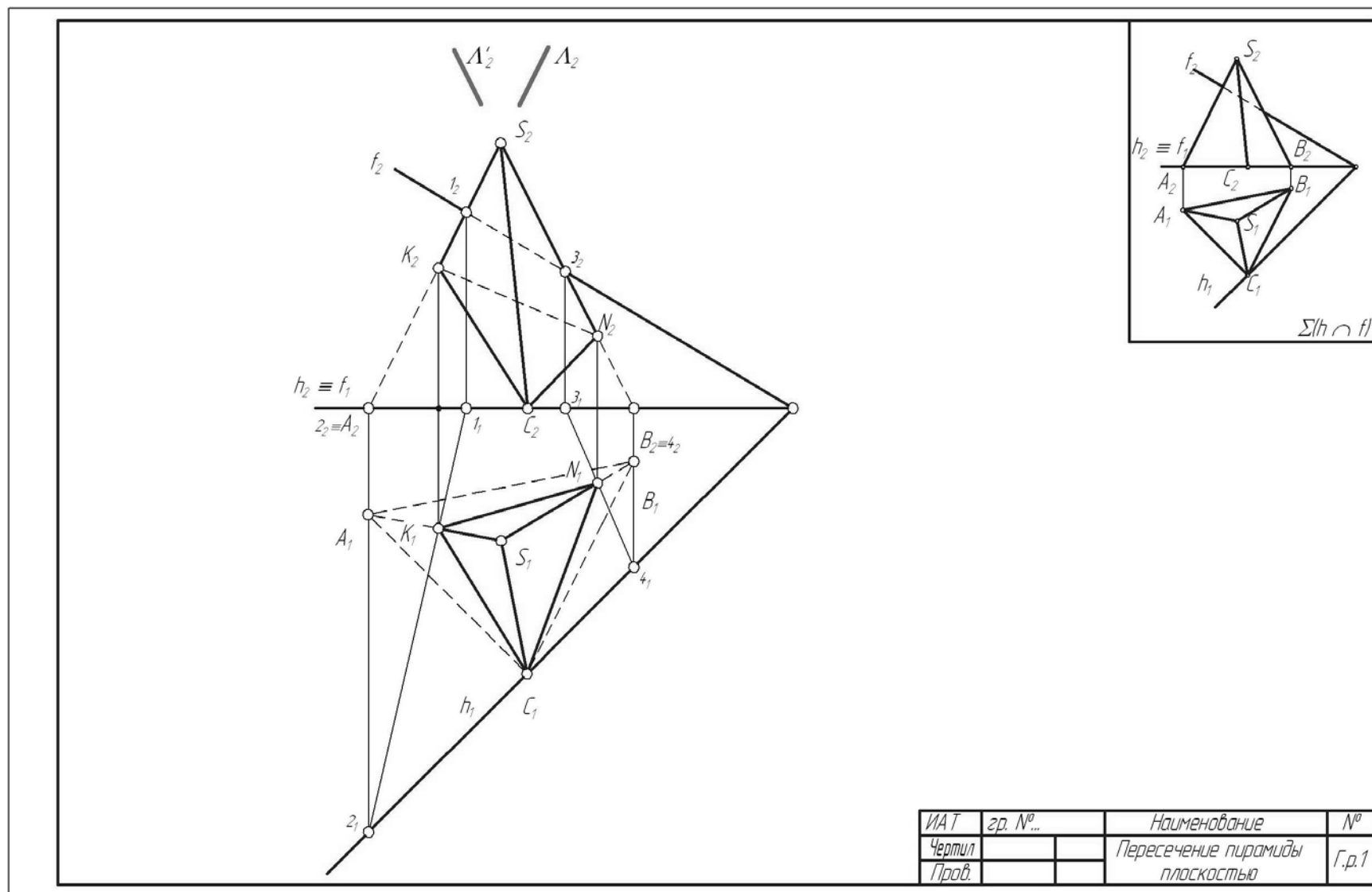


Рис. 1.4. Образец оформления графической работы №1 «Пересечение поверхности плоскостью» без построения развертки

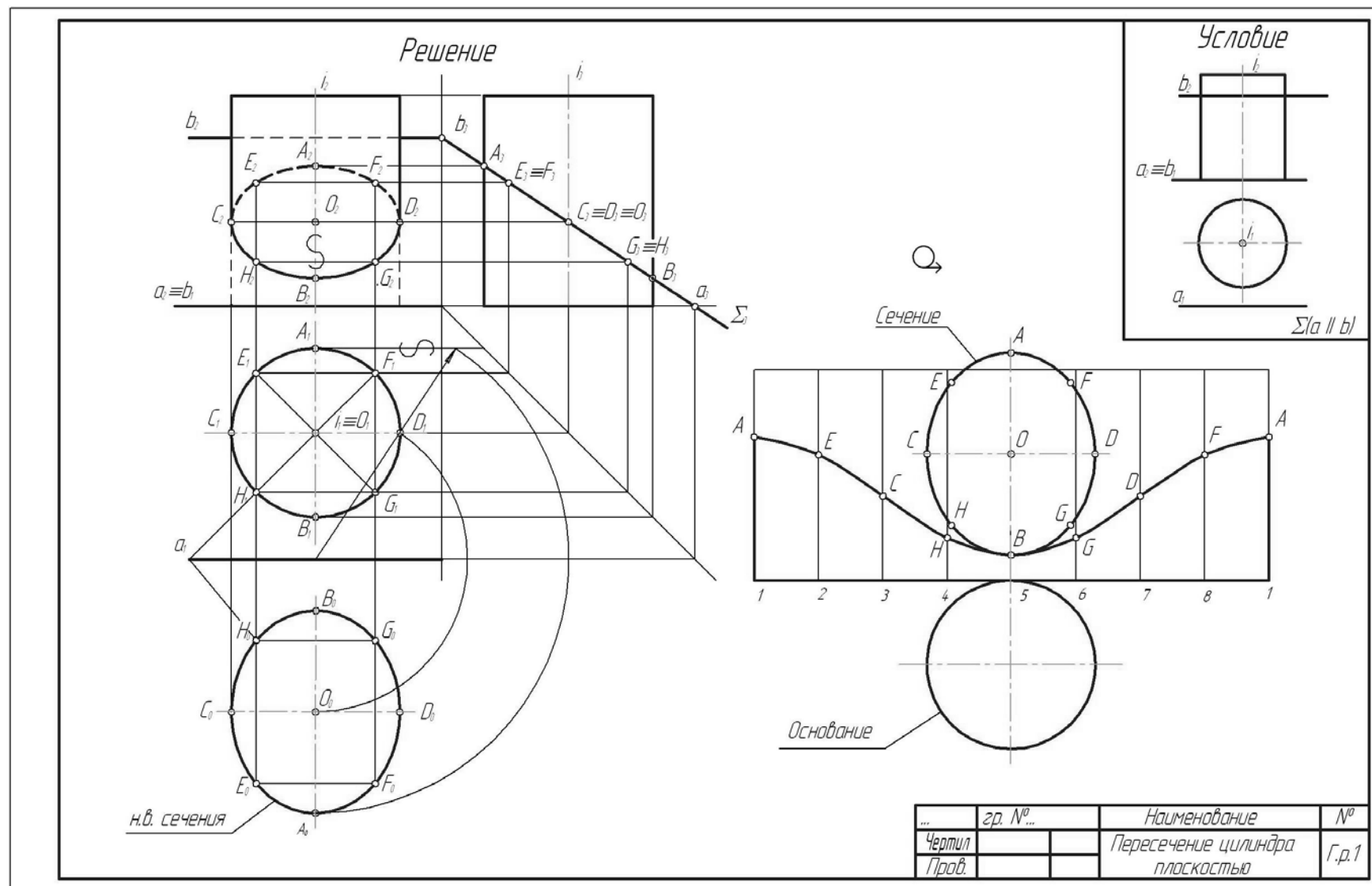
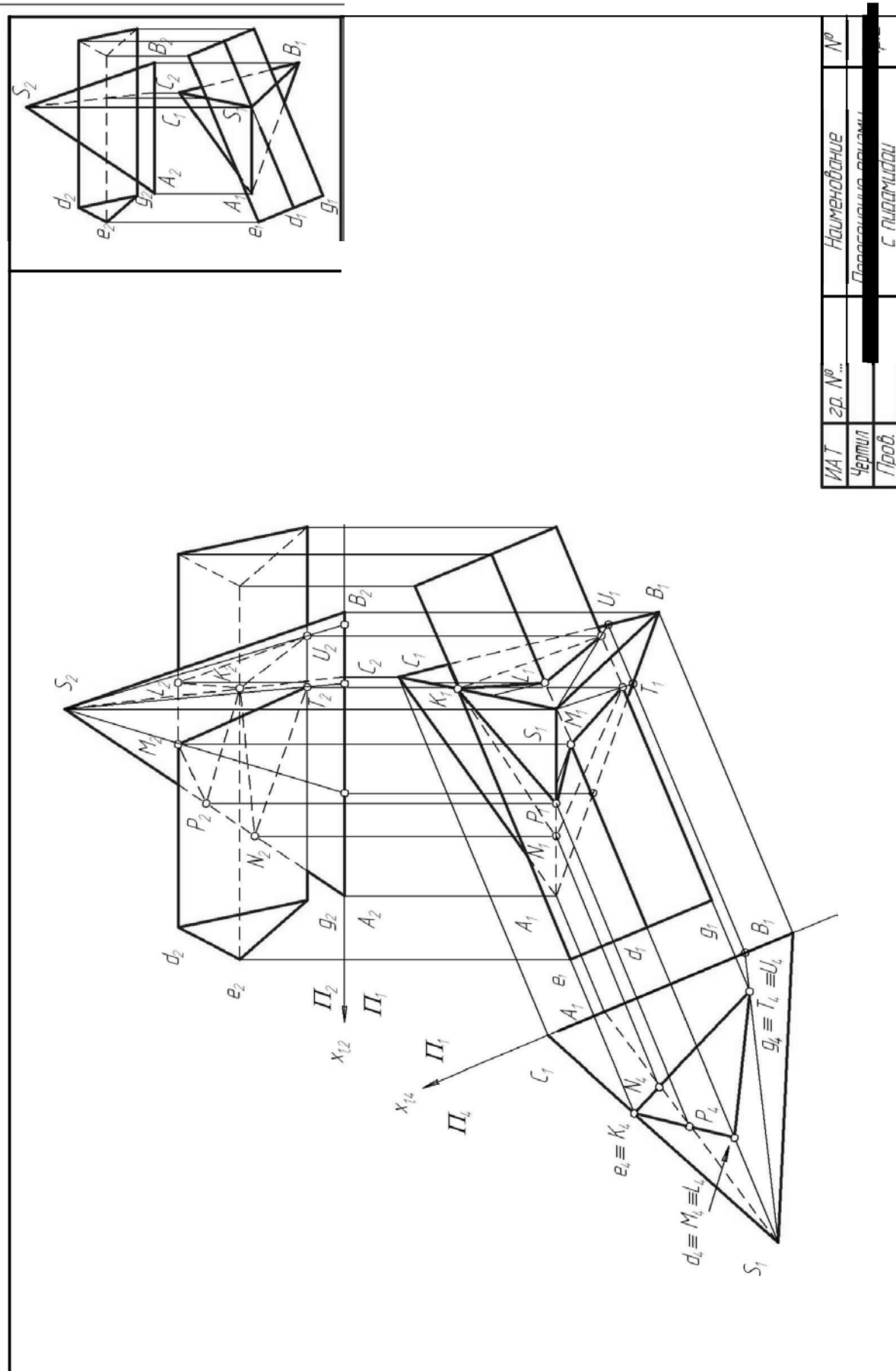


Рис. 1.5. Образец выполнения графической работы №1 «Пересечение поверхности плоскостью» с определением натуральной величины сечения и построением развертки



ИАТ	гр. №...	Наименование	№
Чертит		Полное наименование	
Проб.		С. пирамида	

6. Образец выполнения графической работы №2 «Пересечение поверхностей»

## 2. ПОВЕРХНОСТИ

### 2.1. Способы задания поверхности

#### Теоретическая часть

**Поверхность** – абстрактная фигура, не имеющая толщины. Она ограничивает какое-либо тело, состоящее из металла, пластмассы и т.д. Тело конечно, а поверхность может быть бесконечна. Например, шар ограничен сферой; боковой поверхностью конуса является коническая поверхность.

Существует несколько способов задания поверхности, в том числе: кинематический, аналитический и графический.

В начертательной геометрии поверхность задается графически, а к ее образованию подходят с точки зрения кинематики:

**Поверхность** – совокупность непрерывных последовательных положений линий, движущихся в пространстве по определенному закону.

Эта движущаяся линия называется **образующей**, а линия, по которой она движется, – **направляющей** (рис. 2.1 а).

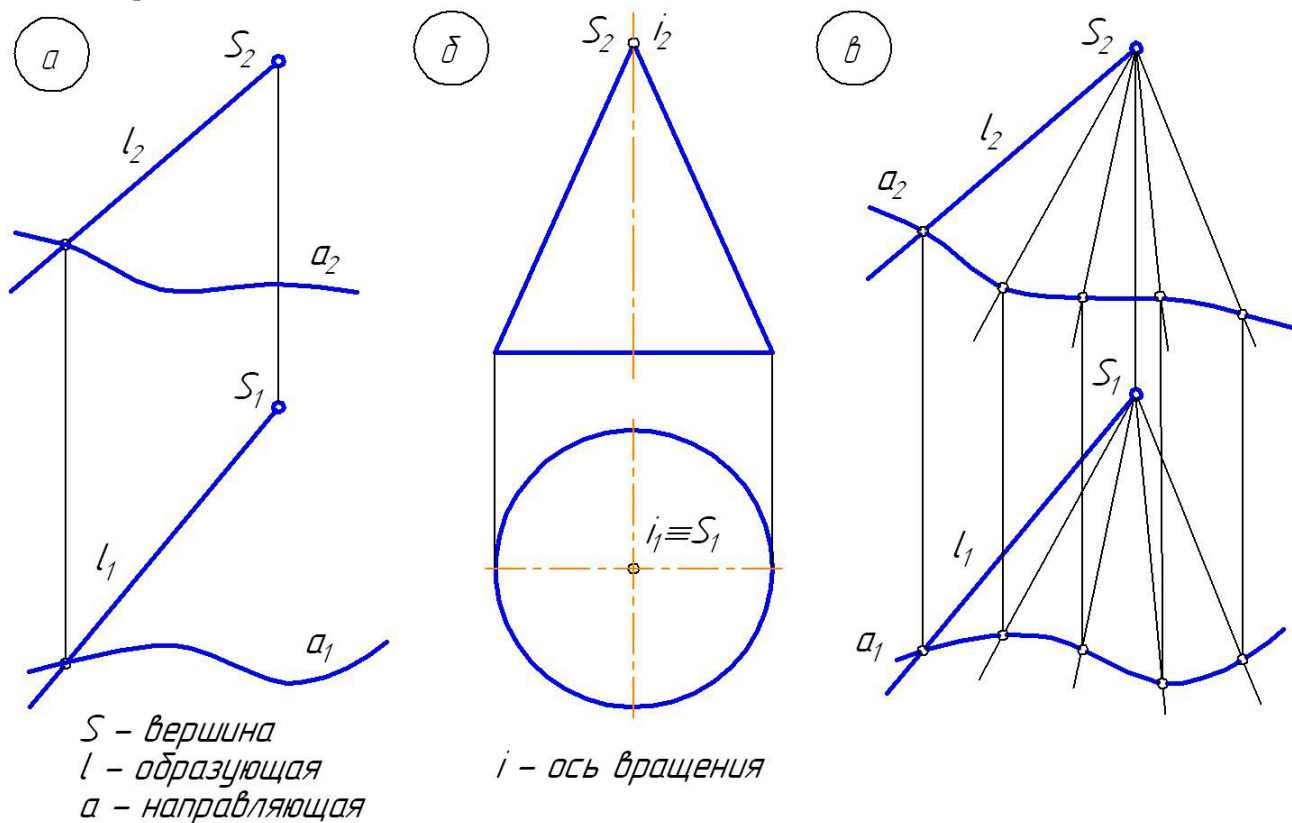


Рис. 2.1

На чертеже поверхность может быть задана:

1. Набором элементов, определяющих эту поверхность (рис. 2.1. а).
2. Очерком поверхности (рис. 2.1. б).
3. Каркасом поверхности (рис. 2.1. в).

**Очерком поверхности** называется проекции контура поверхности на плоскости проекций.

**Каркасом** (точечным или линейным) называется множество точек или линий, определяющих поверхность.

Каркасным способом обычно задаются такие сложные поверхности с образующими переменного вида, которые нельзя описать математически.

Поверхность считается заданной, если по одной проекции точки, принадлежащей ей, можно построить вторую проекцию. Совокупность независимых условий, необходимых и достаточных для однозначного определения поверхности, называется **определителем поверхности**  $\Phi(\Gamma), [A]$ , где  $\Phi$  – поверхность,

$(\Gamma)$  – геометрическая часть определителя поверхности – совокупность геометрических фигур, образующих поверхность;

$[A]$  – алгоритмическая часть определителя поверхности – закон перемещения образующей.

Например, определитель конической поверхности имеет следующий вид:

$$\Phi(l, \tilde{a}, S, \{l \cap a, S \in l\})$$

Алгоритмическая часть определителя читается следующим образом: «Любая образующая  $l$  пересекает направляющую  $a$  и проходит через точку  $S$ ».

## 2.2. Классификация поверхностей

Существует множество различных подходов к классификации поверхностей. Однако главными из них являются следующие критерии:

1. Закон образования поверхности:

- *поверхности закономерные* – если закон их образования известен и может быть выражен математически (см. Приложение 1);
- *незакономерные*.

2. Вид образующей:

- *поверхности нелинейчатые (криволинейные)* – образующая кривая линия (поверхности I класса).
- *поверхности линейчатые* – образующая прямая линия (поверхности II класса);

3. Закон движения образующей:

- *поверхности переноса* – с поступательным движением образующей;
- *поверхности вращения* – с вращательным движением образующей;
- *винтовые поверхности* – с винтовым движением образующей.

4. Постоянность (вариабильность) формы образующей:

- *поверхности с образующей постоянной формы*;
- *поверхности с образующей переменной формы*.

5. Возможность разворачивания поверхности:

- *развертываемые* – поверхности, совмещаемые с плоскостью без складок и разрывов;
- *неразвертываемые*.

Очевидно, что любую поверхность можно классифицировать одновременно по нескольким признакам. Например, цилиндрическая поверхность вращения:

- 1) линейчатая закономерная развертываемая поверхность вращения;
- 2) циклическая поверхность переноса окружности постоянного радиуса;
- 3) алгебраическая поверхность второго порядка.

### Линейчатые и нелинейчатые поверхности

**Линейчатая поверхность** – поверхность, образованная движением прямой линии.

В зависимости от характера движения прямолинейной образующей получаются различные виды линейчатых поверхностей, примеры которых приведены в табл. 4.

## Линейчатые поверхности

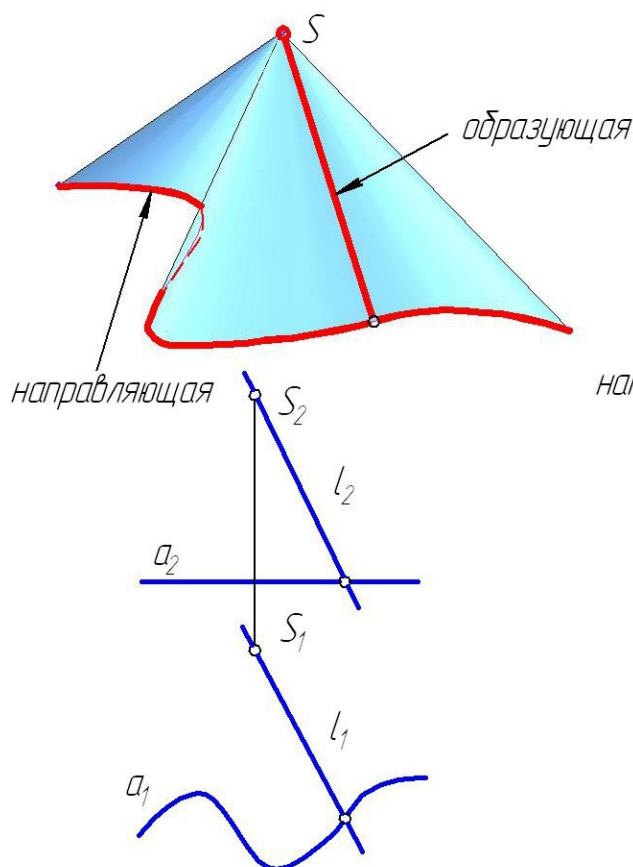
Закон движения образующей	Заданного направления (подкласс 1)	Поверхности вращения (подкласс 2)	Винтовые поверхности (подкласс 3)
Развертываемость			
Развертываемые	Цилиндрические Конические Торсы	Цилиндрические Конические	Развертываемый геликоид
Неразвертываемые	Поверхности Каталана	Однополосный гиперболоид	Прямой геликоид Косой геликоид

**Коническая поверхность** задается движением прямолинейной образующей ( $l$ ), имеющей неподвижную точку – вершину поверхности ( $S$ ) и пересекающей криволинейную (плоскую или пространственную) направляющую ( $a$ ).

Вершина разделяет коническую поверхность на две полости.

**Цилиндрическая поверхность** задается движением прямой линии, параллельной заданному направлению ( $S$ ).

а Коническая поверхность  
 $\Phi(\bar{l}, \tilde{a}, S), [l \cap a, S \in l]$



б Цилиндрическая поверхность  
 $\Phi(\bar{l}, \tilde{a}, S), [l \cap a, l \parallel S]$

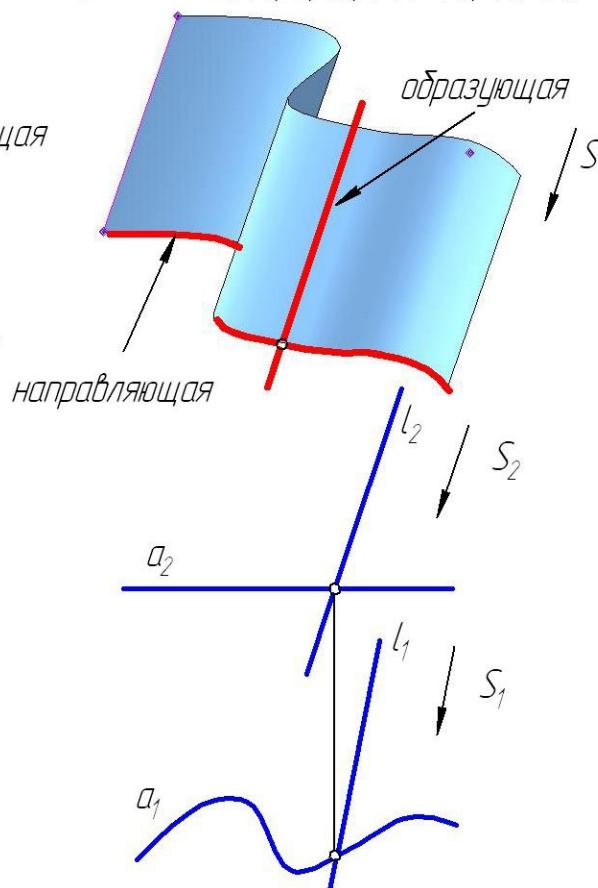


Рис. 2.2

**Поверхность с ребром возврата (торс)** – образуется непрерывным движением прямолинейной направляющей ( $l$ ) по плоской кривой направляющей ( $a$ ) и касающейся, при своем перемещении, пространственной кривой ( $b$ ), называемой **ребром возврата** (рис. 2.3).

При задании торсовой поверхности направляющую  $a$  можно не указывать, т.к. к каждой точке ребра возврата можно провести только одну касательную.

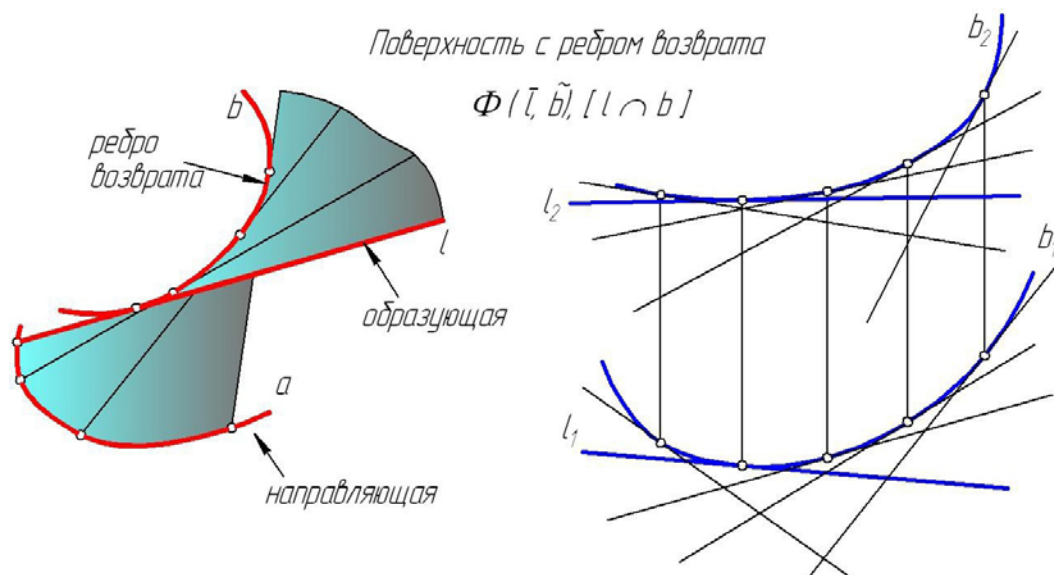


Рис.2.3

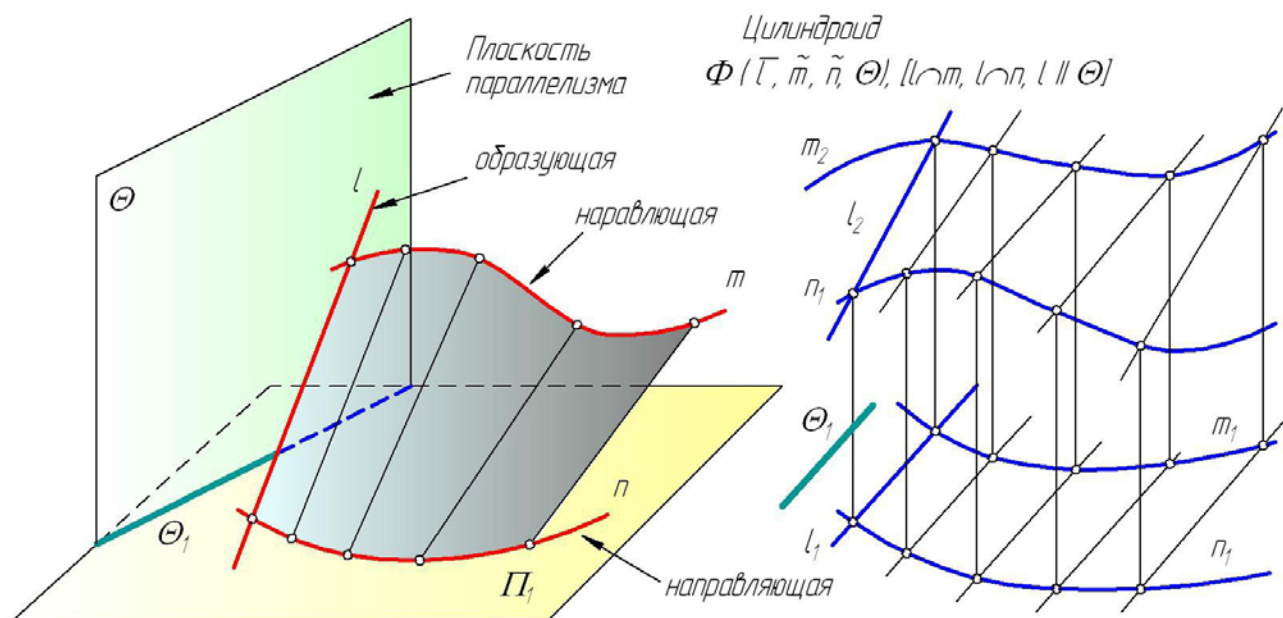


Рис. 2.4

Конус

$\Phi(\bar{l}, m, \tilde{n}, \Theta \equiv \Pi), [l \cap m, l \cap n, l \parallel \Theta, n \perp \Theta]$

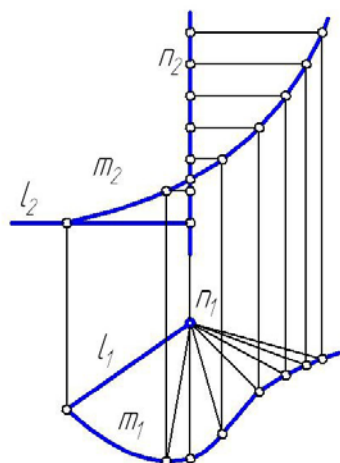


Рис. 2.5

**Поверхности Каталана** – неразвертываемые поверхности с плоскостью параллелизма. К ним относятся цилиндроид, конус и гиперболический параболоид (косая плоскость).

**Поверхность с плоскостью параллелизма** называется поверхность, прямая образующая которой пересекает две направляющие, при этом остается параллельной заданной плоскости.

**Цилиндроид** (рис. 2.4) имеет две пространственные кривые направляющие, у **конуса** (рис. 2.5) одна направляющая – кривая линия, другая прямая.



Гиперболический параболоид или **косая плоскость** (рис. 2.6) – поверхность с плоскостью параллелизма, у которой направляющие – скрещивающиеся прямые, а образующая – прямая. Фронтальный очерк такой поверхности – парабола. Касательная к ней плоскость пересечет поверхность по двум пересекающимся прямым. Произвольная плоскость  $\Lambda'$ , пересекает поверхность по гиперболе. Также данная поверхность может быть образована в результате параллельного перемещения параболы по направляющей (параболе).

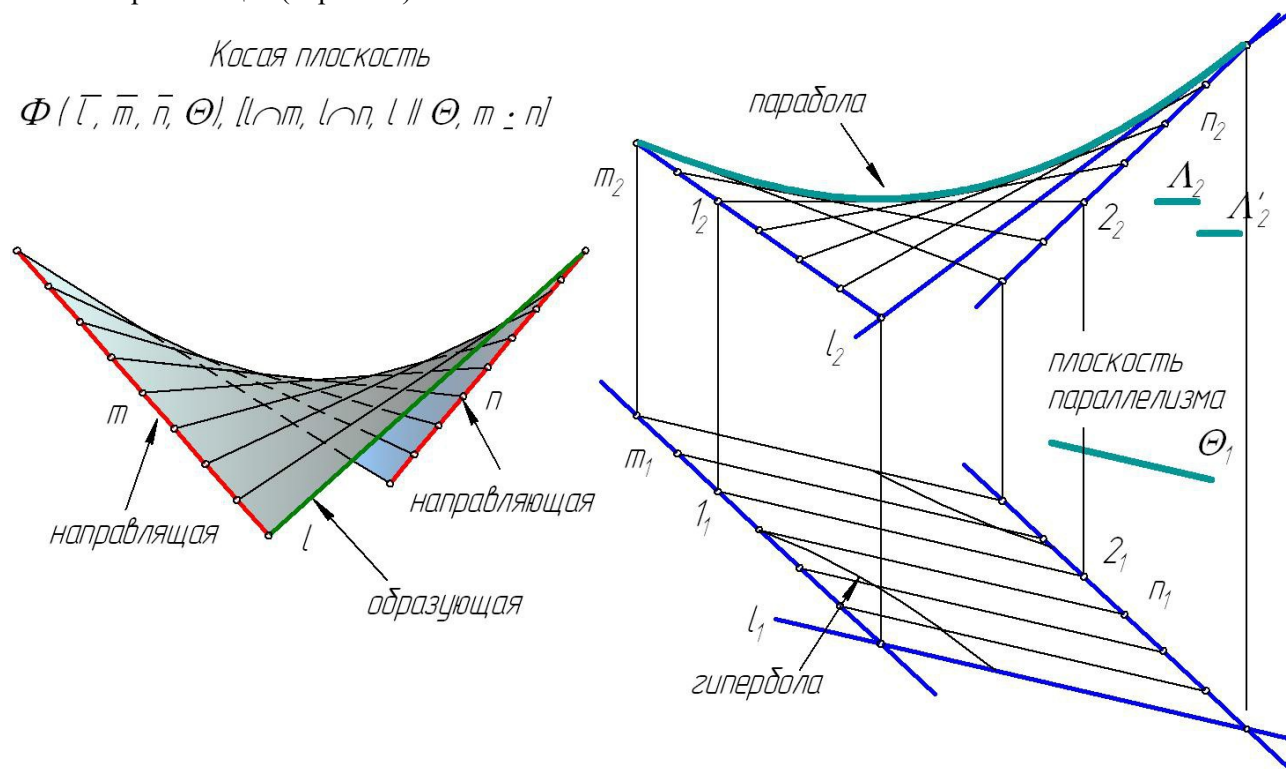


Рис. 2.6

**Нелинейчатые поверхности** образуются движением плоской криволинейной образующей (окружностью или кривой общего вида).

Таблица 2.2

### Нелинейчатые поверхности

Закон движения образующей	Заданного направления (подкласс 1)	Поверхности вращения (подкласс 2)	Винтовые поверхности (подкласс 3)
Вид образующей			
Образующая общего вида	Поверхности параллельного переноса общего вида Каналовые поверхности	Поверхности вращения, в том числе эллипсоид, параболоид, гиперболоид	-
Образующая окружность	Циклические поверхности	Сфера Тор Глобoid	Винтовой тор Нормальный геликоидальный круглый цилиндр

На рисунке 2.7 показана **поверхность параллельного переноса**, образованная поступательным движением плоской кривой по направляющей – кривой линии. При этом образующая остается параллельной самой себе.

**Каналовые поверхности** (рис. 2.8) образуются движением плоской замкнутой образующей по криволинейной направляющей.

Образующие каналовой поверхности могут иметь различную форму или одинаковую форму, но различную площадь сечений.

Такие поверхности обычно имеют сечения, параллельные какой-либо плоскости (каналовые поверхности с плоскостью параллелизма) или перпендикулярные направляющей (нормальные, прямые каналовые поверхности).

Если образующая каналовой поверхности окружность, то такая поверхность называется циклической. Каналовая поверхность с образующей постоянного радиуса называется **трубчатой**.

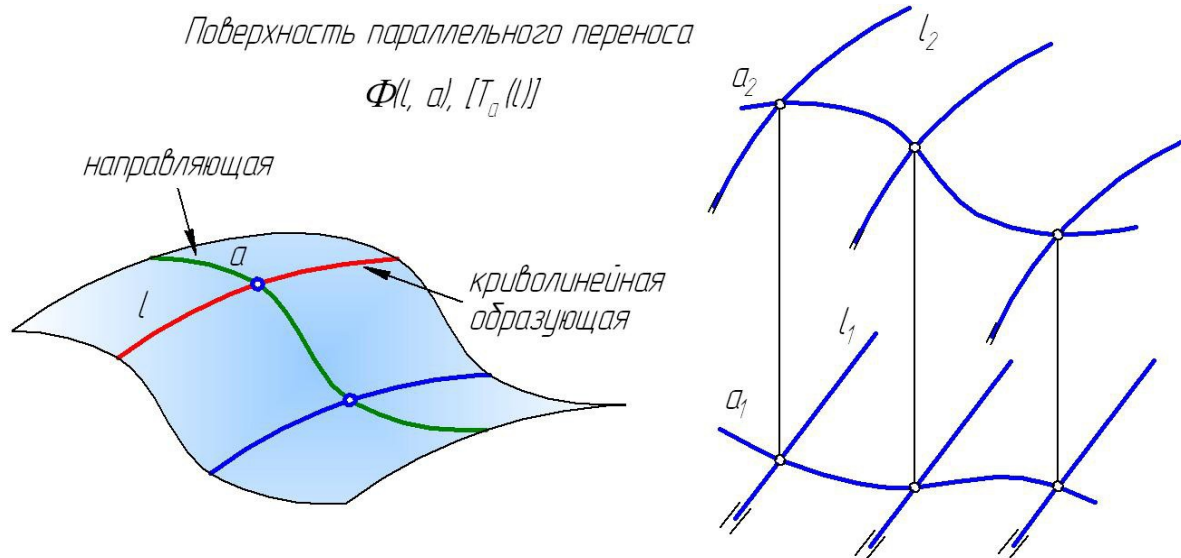


Рис. 2.7

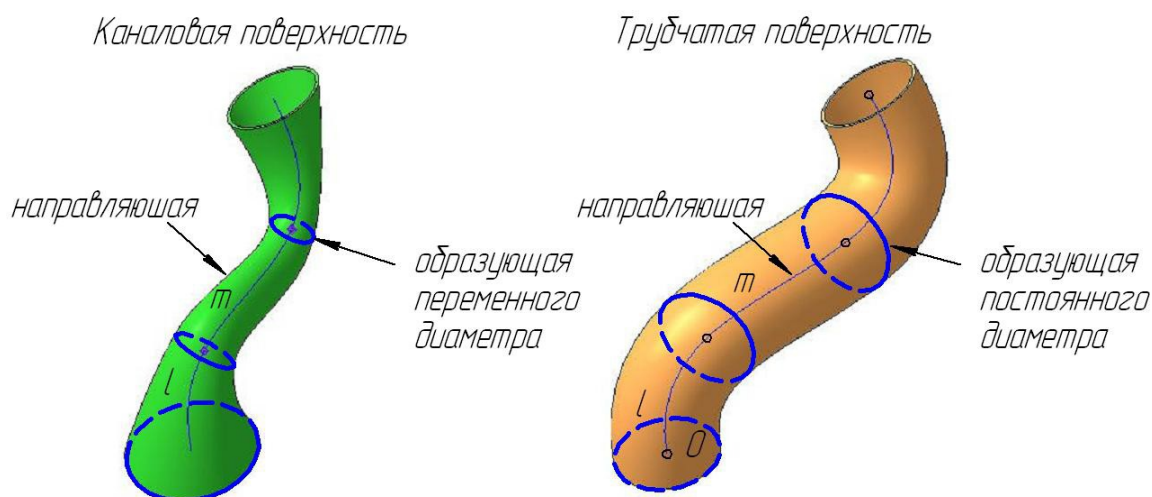


Рис. 2.8

## Винтовые поверхности

**Винтовой поверхностью** называется поверхность, образованная винтовым движением некоторой образующей в пространстве.

Определитель винтовой поверхности:

$$\Phi(l, i), [l_j = T_j(l) \circ R_j(l)]$$

где  $l$  – образующая винтовой поверхности;

$i$  – ось винтовой направляющей;

$l_j = T_j(l)$  – параллельное перемещение образующей вдоль оси  $I$ ;

$R_j(l)$  – вращение образующей вокруг оси  $i$ .

Образующая винтовой поверхности может быть прямой или кривой линией. Если образующая – прямая линия, то поверхность называется **геликоидом** (линейчатая винтовая поверхность). Гелико-

иды бывают двух типов: прямые и наклонные.

Таблица 2.3

### Винтовые поверхности

Поверхности	Линейчатые	Криволинейные
		Образующая - окружность
Развертываемые	Развертываемый (винтовой торс) геликоид	-
Неразвертываемые	Прямой геликоид Косой геликоид Кольцевой геликоид Кольцевой коноид	Винтовой торс Нормальный геликоидальный круглый цилиндр

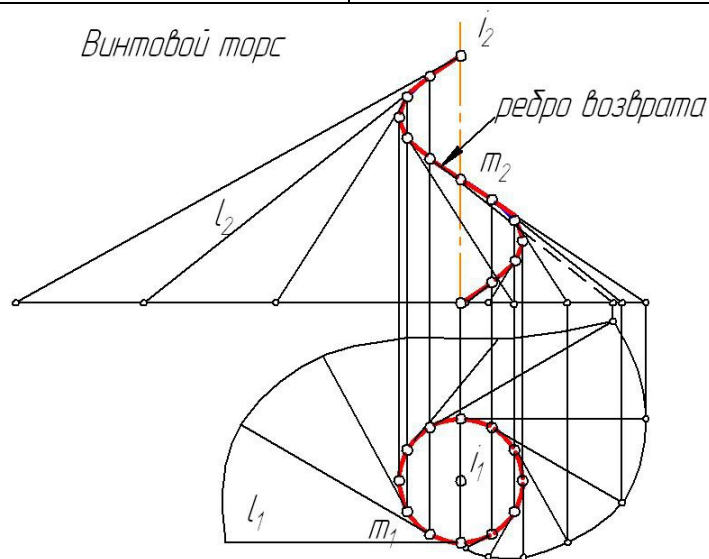


Рис. 2.9

**Винтовой торс (развертывающийся геликоид)** (рис. 2.9) имеет прямолинейную образующую, касающуюся направляющей винтовой линии (кривая возврата).

У **прямого геликоида (винтового коноида)** направляющие две линии, одна из которых винтовая линия, другая – ее ось, а плоскостью параллелизма является плоскость, перпендикулярная оси винтовой линии.

Если наклон образующей винтовой поверхности к оси отличен от  $90^\circ$ , то поверхность называется косой.

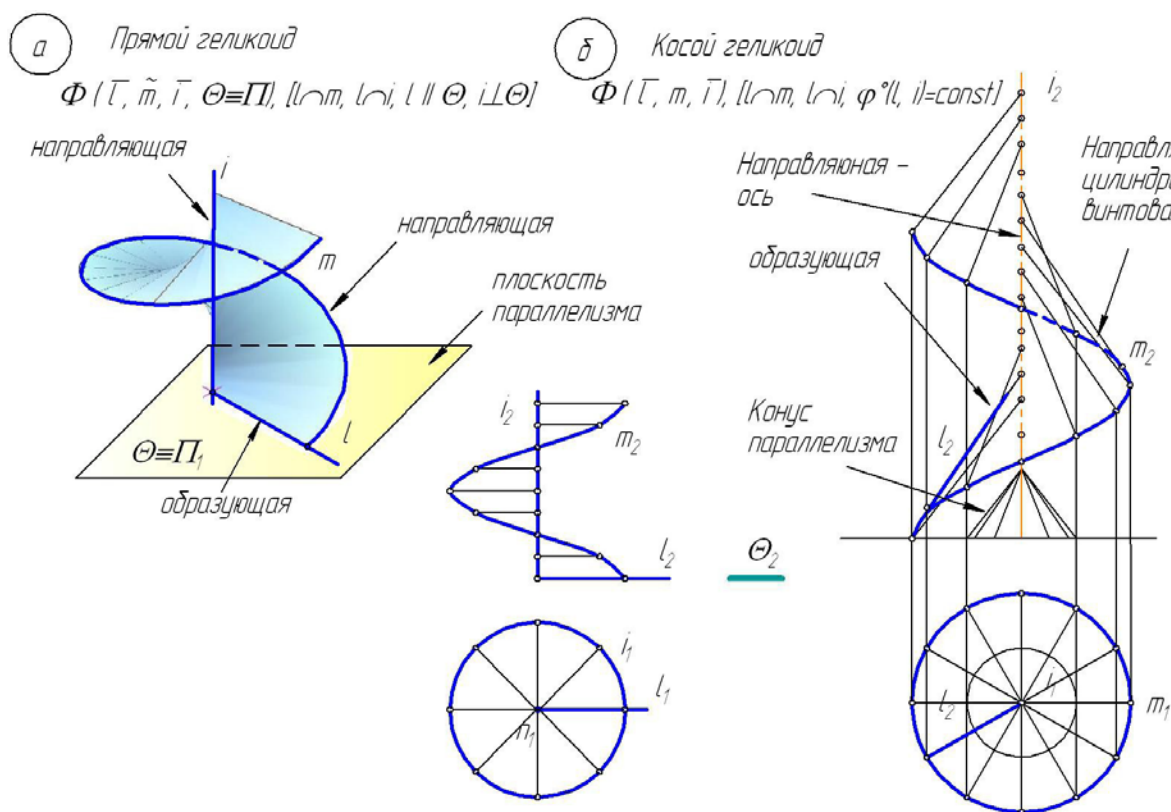


Рис. 2.10

На образующие **косого геликоида** накладывается условие постоянства угла наклона образующей к оси винтовой линии. Они все должны быть параллельны образующим кругового конуса, который называется конусом параллелизма.

Если пересечь кривой геликоид плоскостью, перпендикулярной винтовой направляющей, то она пересечет поверхность по спирали Архимеда.

**Кольцевой геликоид (кольцевой коноид)** получается при пересечении винтового коноида соосным с ним цилиндром.

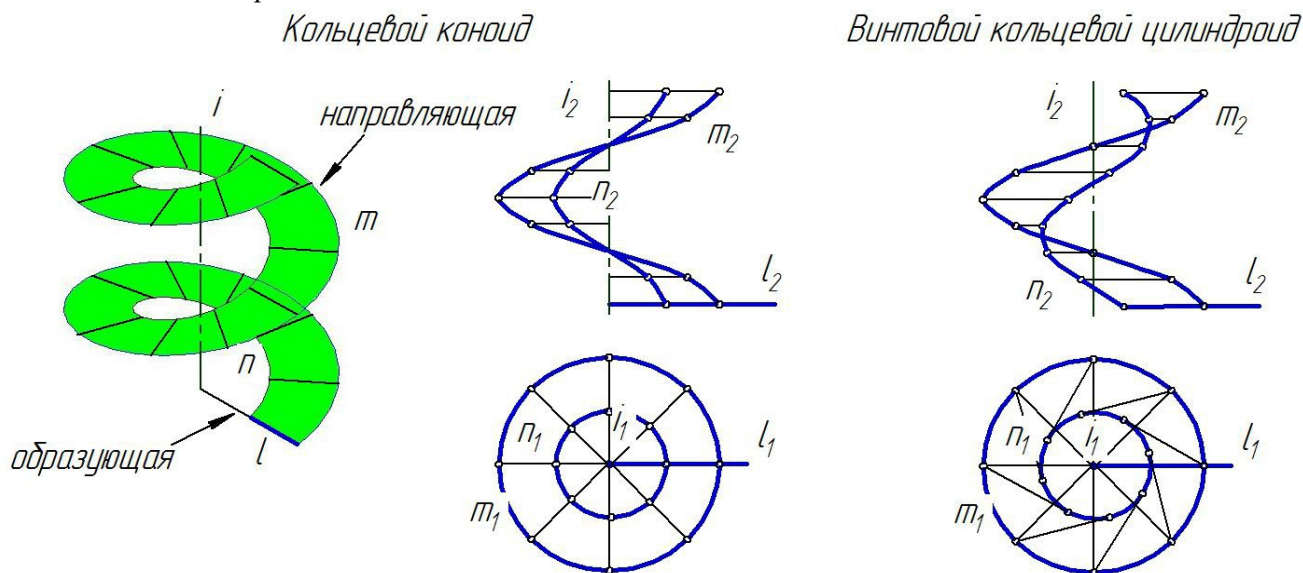


Рис. 2.11

Из всего множества поверхностей в кратком курсе начертательной геометрии мы будем рассматривать только гранные поверхности и поверхности вращения.

### Гранные поверхности

Призматические и пирамидальные поверхности (гранные поверхности) имеют прямую образующую и ломаную линию в качестве направляющей.

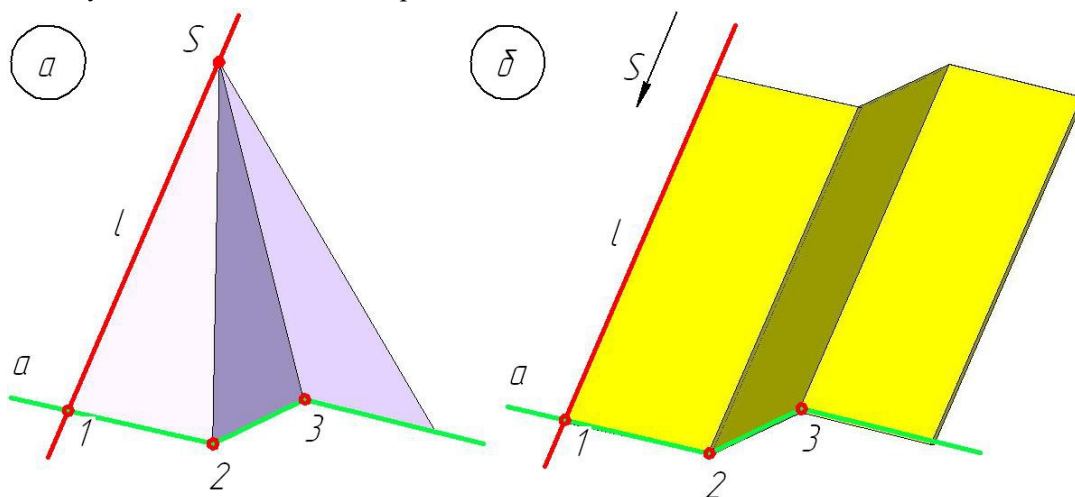


Рис. 2.12

У **пирамидальной поверхности** образующая  $l$ , двигаясь по ломаной направляющей  $a$ , все время проходит через одну точку  $S$ , называемую вершиной.

Образующая **призматической поверхности**, двигаясь в пространстве по ломаной направляющей, все время остается параллельной самой себе.

**Многогранник** – пространственная фигура, ограниченная со всех сторон плоскостями (гранями).

Линии, по которым пересекаются грани, называются ребрами.

К многогранникам относятся прямые и наклонные призмы, пирамиды с разным количеством граней. Основанием призм и пирамид является многоугольник, по количеству сторон которого их называют трехгранными, четырехгранными и т.д.

Призма называется прямой, если ее ребра перпендикулярны плоскости основания. Пирамида называется наклонной, если точка основания ее высоты не является центром окружности, в которое вписано основание.

Правильные выпуклые многогранники, все грани которых являются правильными многоугольниками (тела Платона). К ним относятся многогранники с гранями – правильными треугольниками: тетраэдр (4 грани), октаэдр (8), икосаэдр (20), а также с гранями – квадратами: куб (6), додекаэдр (20). Также существуют правильные выпукло-вогнутые – звездчатые многогранники.

На КЧ многогранники задаются проекциями граней и ребер.

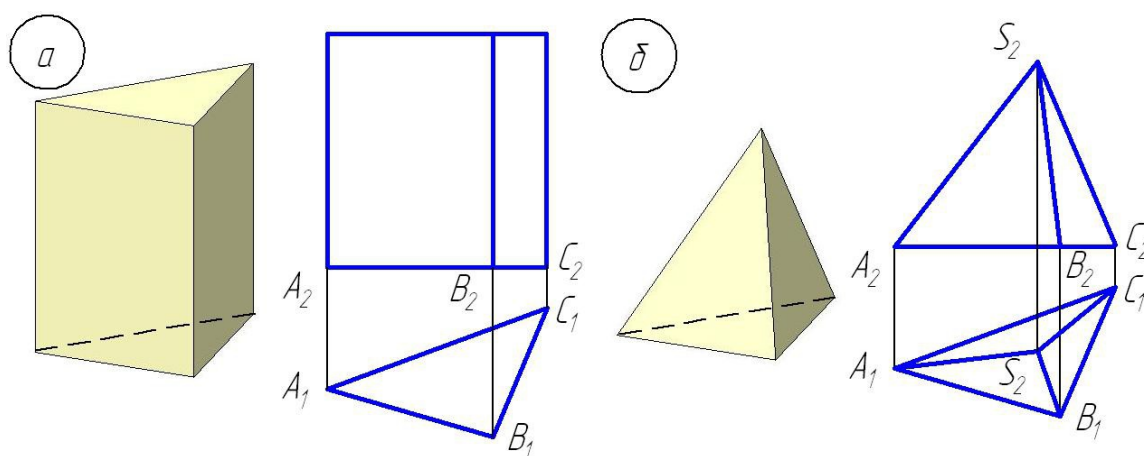


Рис. 2.13

## Поверхности вращения

**Поверхности вращения** – поверхности, образованные вращением линии вокруг оси.

Образующая поверхности вращения может быть прямой линией (развертываемые поверхности вращения) или иметь произвольную форму (неразвертываемые или условно развертываемые поверхности вращения).

Таблица 2.4

### Поверхности вращения

Поверхности	Линейчатые	Криволинейные	
		Образующая – окружность	Образующая – кривая общего вида
Развертываемые	Цилиндрические Конические	-	
Неразвертываемые	Однополосный линейчатый гиперболоид	Сфера Глобоид Тор	Эллипсоид Параболоид Гиперболоид Глобоид Тела вращения

На рисунке 2.14 показана поверхность общего вида, образованная вращением плоской кривой  $l$  вокруг оси  $i$ , перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций.



Каждая точка образующей  $l$  движется по траектории-окружности с центром на оси вращения  $i$ . Эта окружность называется **параллелью**. Плоскость траектории движения точки перпендикулярна оси вращения. Параллель, проходящая через наиболее удаленную от оси вращения точку образующей, называется **экватором**, а через ближайшую – **горлом**. Линия  $m$ , получаемая при пересечении поверхности плоскостью, проходящей через ось вращения, называется **меридианом**. Все меридианы поверхности вращения конгруэнтны. Каждый из них разделяется на два, симметричных относительно оси вращения, **полумеридиана**.

Меридиан, лежащий в плоскости, параллельной плоскости проекций, называется главным меридианом. В данном примере он определяет фронтальный очерк поверхности, горизонтальный очерк определяется экватором и горлом.

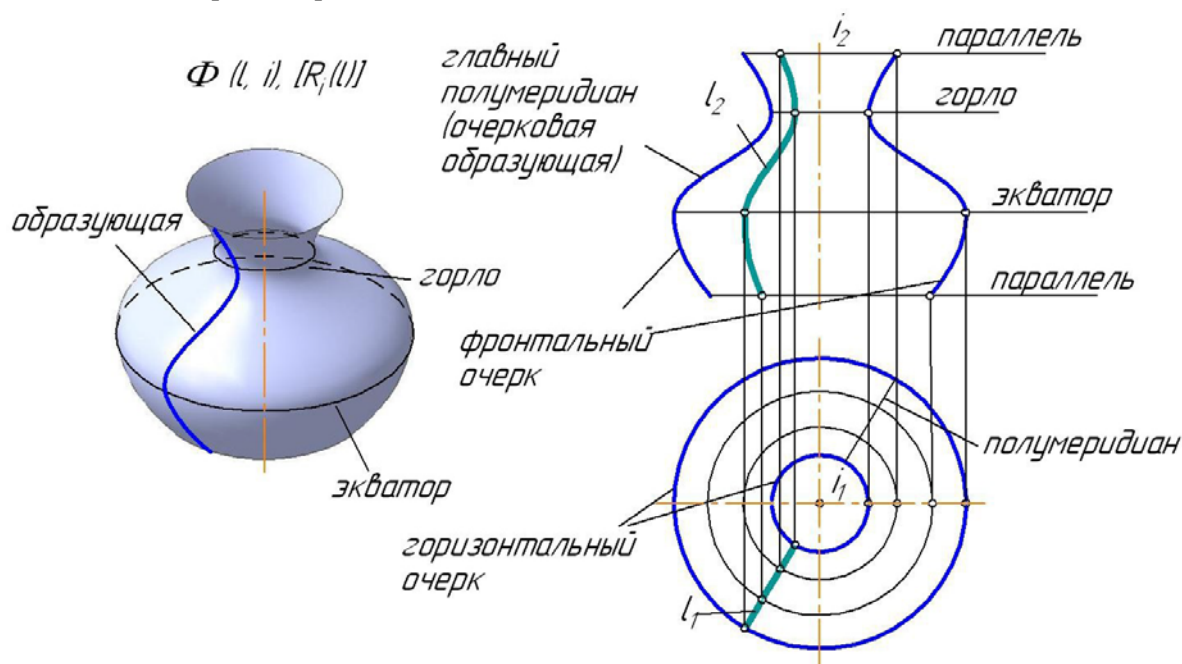


Рис. 2.14

## 2.3. Принадлежность точки и линии поверхности

### Теоретическая часть

**Точка принадлежит поверхности**, если она принадлежит линии, лежащей на этой поверхности.

**Линия принадлежит поверхности**, если каждая ее точка принадлежит этой поверхности.

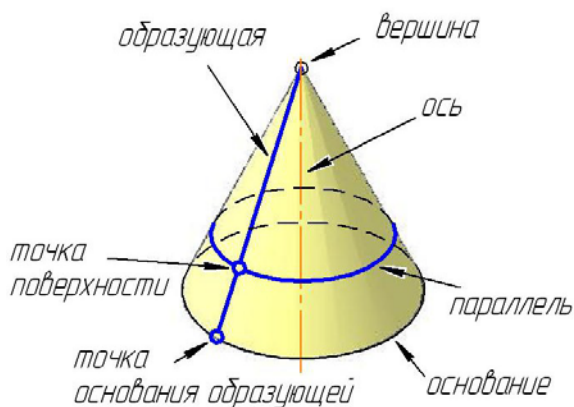


Рис. 2.15

**Частный случай:** Построение проекций точек, принадлежащих проецирующей поверхности.

Если точка или линия принадлежит поверхности, у которой все образующие перпендикулярны одной из плоскостей проекций (**проецирующая поверхность**), то их соответствующие проекции находятся на очерке этой поверхности.

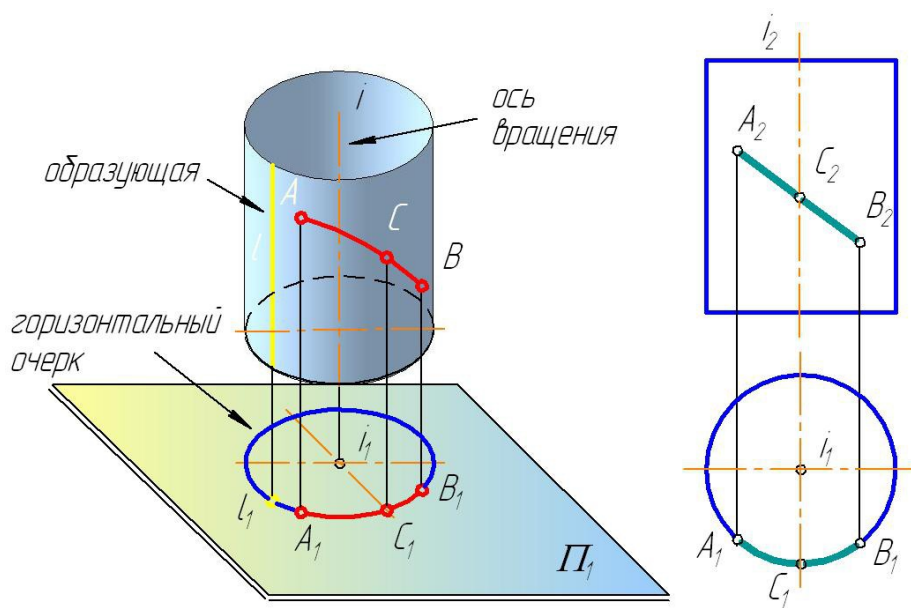


Рис. 2.16

**Общий случай:** Построение проекций точки, принадлежащей непроецирующей поверхности вращения.

Построение точек, принадлежащих поверхности вращения, ведется с помощью образующих или параллелей поверхности.

Задана фронтальная проекция точки  $A$ , принадлежащей поверхности конуса. Этой проекции соответствуют две точки ( $A$  и  $A'$ ). Точка  $A$  располагается на видимой по отношению к фронтальной плоскости проекций части конуса, другая, соответственно, на невидимой.

Существует два пути решения этой задачи.

В первом случае (рис. а) строятся образующие, проходящие через данные точки. Точка  $A$  располагается на образующей, проходящей через вершину  $S$  и точку основания образующей  $l$ . Точка  $A'$  располагается на невидимой  $Sl'$ .

Второй способ определения недостающей проекции точки – построение параллели поверхности  $p$  (рис. б).

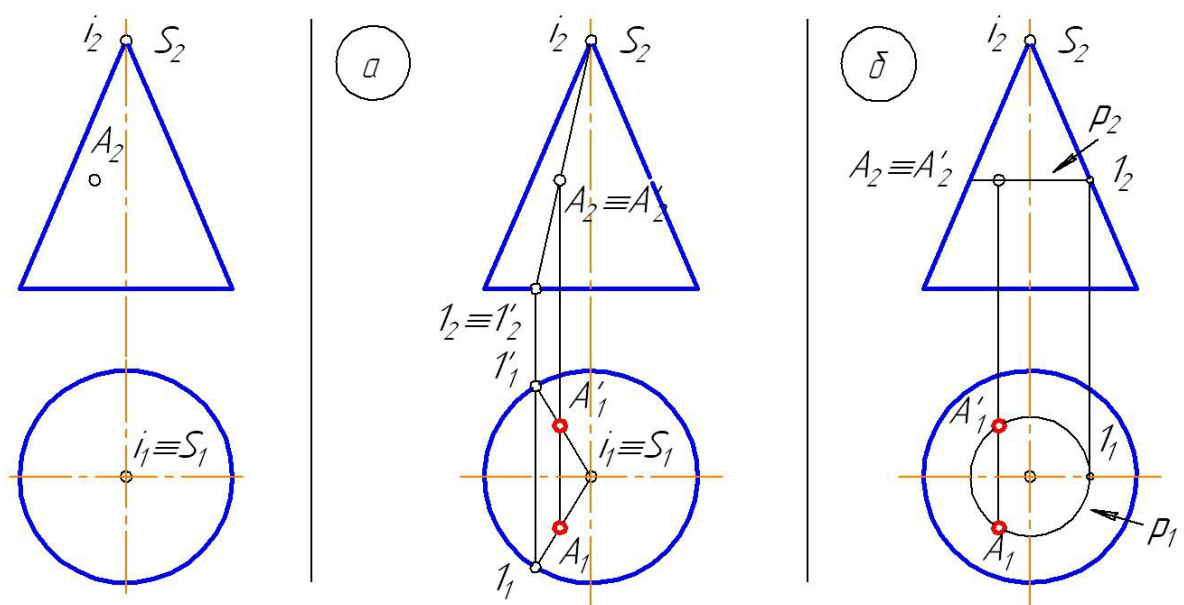


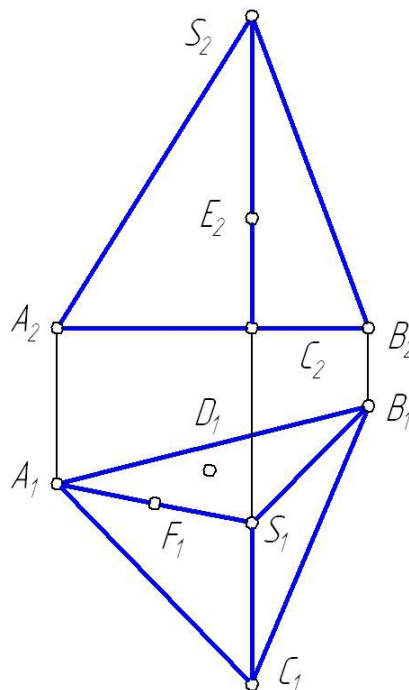
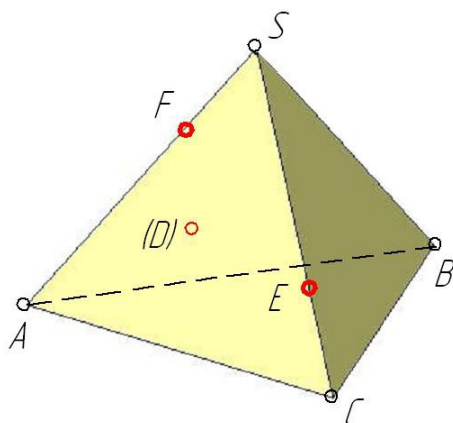
Рис. 2.17

## Примеры решения задач

**Пример 1:** Построить недостающие проекции точек, принадлежащих поверхности пирамиды  $SABC$ .

Принадлежность точек поверхности пирамиды определяется принадлежностью их ребрам и граням этой пирамиды.

$$\frac{D, E, F \in SABCD}{D_2, F_2, E_1}$$



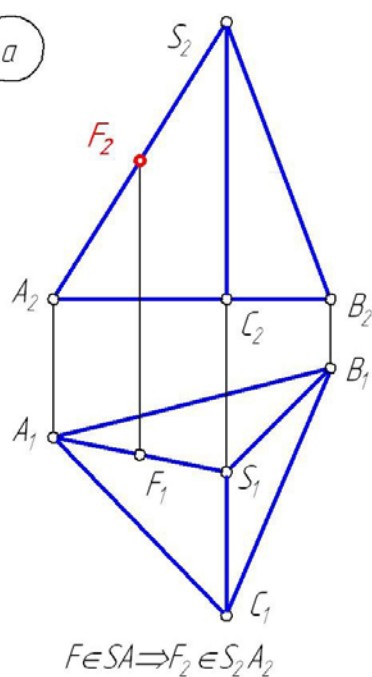
Фронтальная проекция точки  $F$  определяется по принадлежности ее ребру  $SA$  (рис. а).

Точка  $D$  принадлежит грани  $SAB$ . Ее фронтальная проекция определяется с помощью образующей  $S1$ , проходящей через эту точку (рис. б).

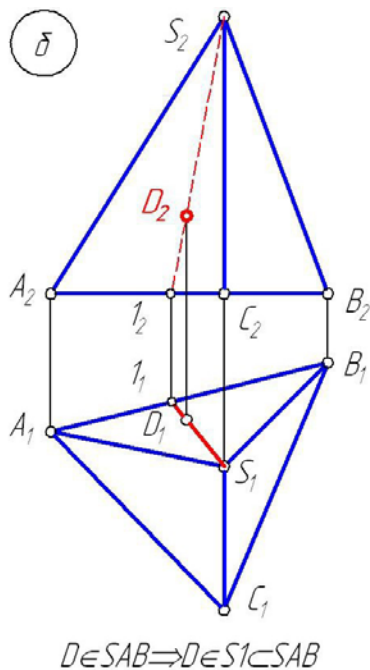
Точка  $E$  находится на ребре  $SC$ , расположенном параллельно профильной плоскости проекций. Ее фронтальную проекцию можно найти двумя способами:

1. Построить отрезок, принадлежащий грани  $SBC$ , параллельный стороне основания  $BC$  (рис. в).
2. Построить профильную проекцию точки, затем найти ее горизонтальную проекцию (рис. г).

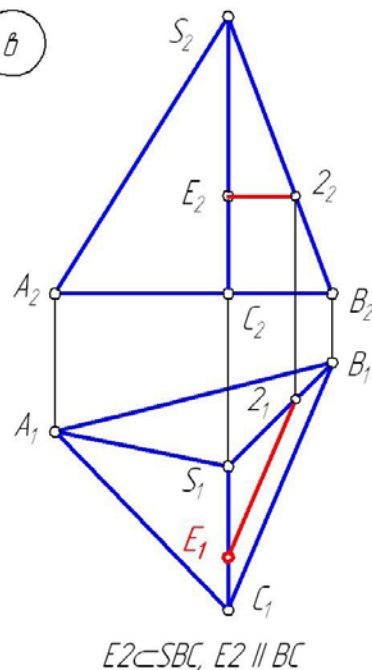
(а)



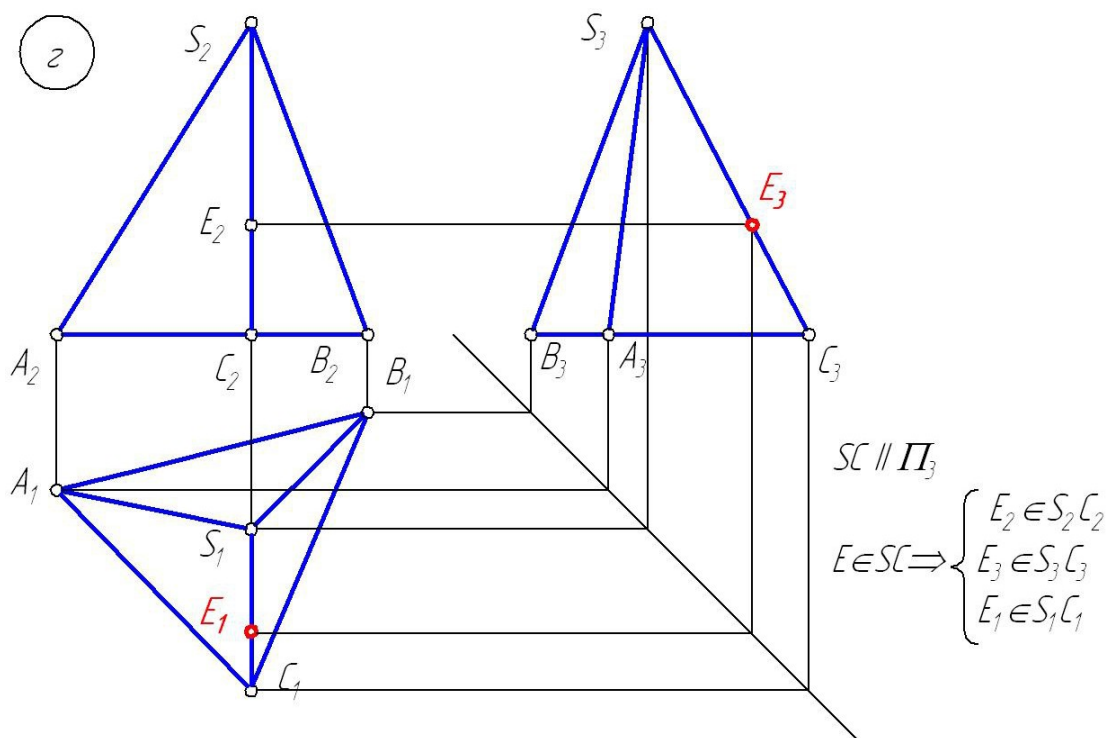
(б)



(в)

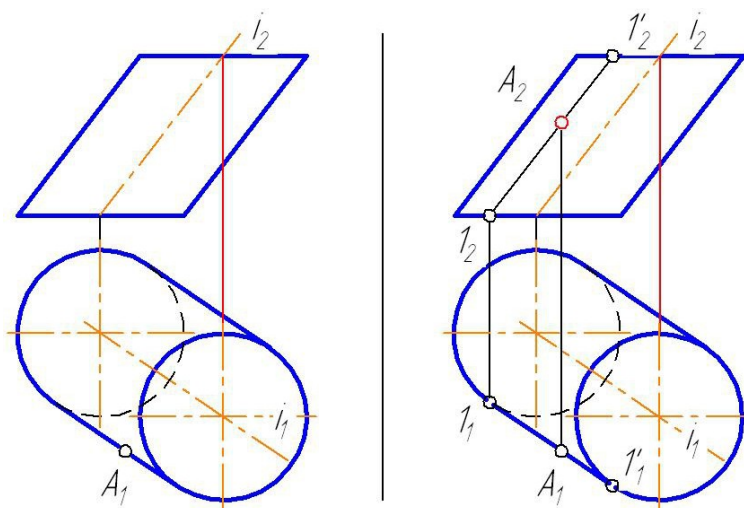




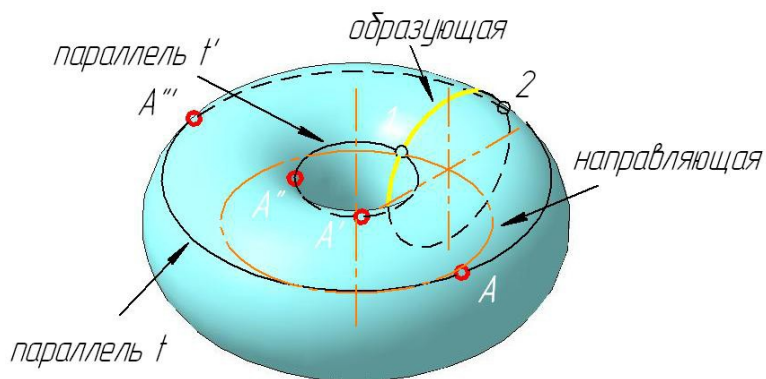


**Пример 2.** Построить фронтальную проекцию точки  $A$ , принадлежащей поверхности наклонного кругового цилиндра.

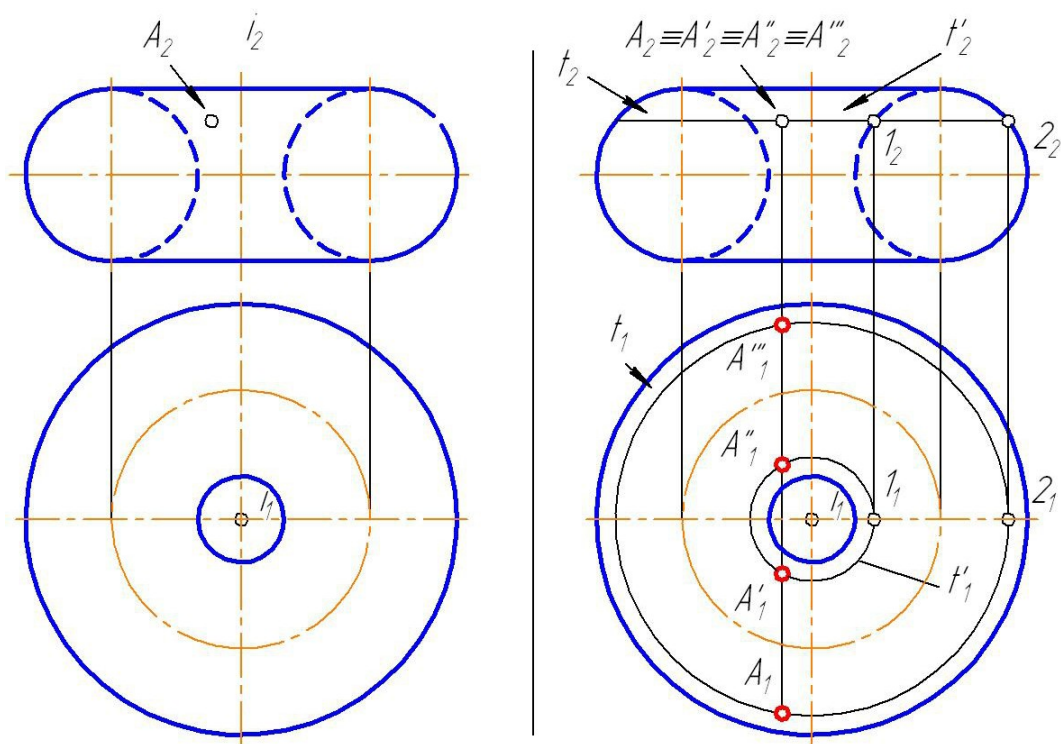
Точка  $A$  принадлежит левой горизонтальной очерковой образующей наклонного цилиндра  $11'$ . Для построения ее фронтальной проекции сначала нужно фронтальную проекцию этой образующей. На чертеже точка  $I$  – точка основания горизонтальной очерковой образующей.



**Пример 4.** Построить горизонтальные проекции точки, принадлежащей поверхности тора и соответствующих заданной фронтальной проекции.



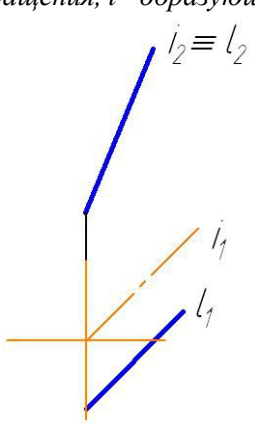
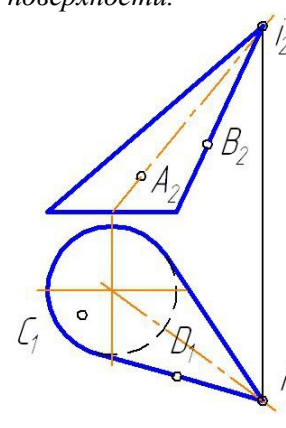
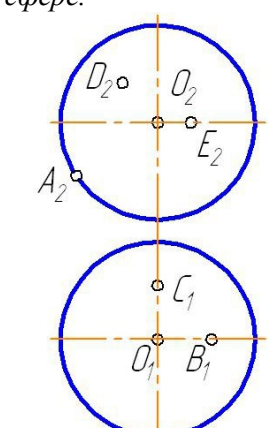
На поверхности тора могут находиться четыре точки, соответствующие заданной на КЧ фронтальной проекции точки  $A$ . Эти точки располагаются на внешней  $t$  и внутренней  $t'$  параллелях тора. На каждой из параллелей находятся по две точки, одна из которых видна по отношению к фронтальной плоскости проекций, вторая не видна.



### Вопросы для самостоятельного контроля знаний

1. Что называется поверхностью?
2. В чем разница между поверхностью и геометрическим телом?
3. В чем суть кинематического способа образования поверхности?
4. Что называется образующей и направляющей поверхности?
5. На какие группы делятся поверхности?
6. Какие поверхности называются линейчатыми, как они образуются?
7. Как задаются поверхности на КЧ?
8. Что такое очерк, каркас поверхности?
9. Как образуется поверхность вращения? Какие характерные линии она имеет?
10. Какие образующие имеют поверхности цилиндра, конуса, сферы, тора и как они располагаются относительно оси вращения?
11. Как находится в общем случае недостающая проекция точки или линии на поверхности вращения и многограннике?
12. Как определяется видимость линии, принадлежащей поверхности?

### Задачи для самоподготовки

<p><b>Задача 1.</b> Построить очерки поверхности вращения, если <math>l_1</math> – ось вращения, <math>l_2</math> – образующая.</p> 	<p><b>Задача 2.</b> Найти недостающие проекции точек, принадлежащих поверхности.</p> 	<p><b>Задача 3.</b> Найти недостающие проекции точек, принадлежащих сфере.</p> 
---	--	--

## 2.4. Пересечение поверхности плоскостью

### Теоретическая часть

*Результатом пересечения какой-либо поверхности плоскостью является плоская фигура, называемая **сечением**.*

Форма сечения зависит от того, с какой поверхностью пересекается плоскость.

Построение линии пересечения поверхности с плоскостью начинают с нахождения особых (опорных) точек. Их в общем случае находят с помощью дополнительных секущих плоскостей. Выбор той или иной дополнительной плоскости также зависит от типа пересекаемой поверхности.

### Пересечение плоскости с многогранником

Сечение многогранника – многоугольник. В зависимости от того, сколько ребер и сторон основания пересекает плоскость, столько вершин имеет сечение многогранника.

**Общий случай.** Построение линии пересечения многогранника с плоскостью общего положения.

Существует два способа построения линии сечения многогранника:

*1-й способ.* Определение точек пересечения ребер и сторон основания многогранника с заданной плоскостью. В этом случае вспомогательные плоскости проводятся через ребра («способ ребер»). При этом задача сводится к задаче на нахождение точки пересечения прямой с плоскостью.

*2-й способ.* Определение линии пересечения граней и основания многогранника с плоскостью («способом граней»). Задача сводится к задаче на нахождение линии пересечения плоскостей.

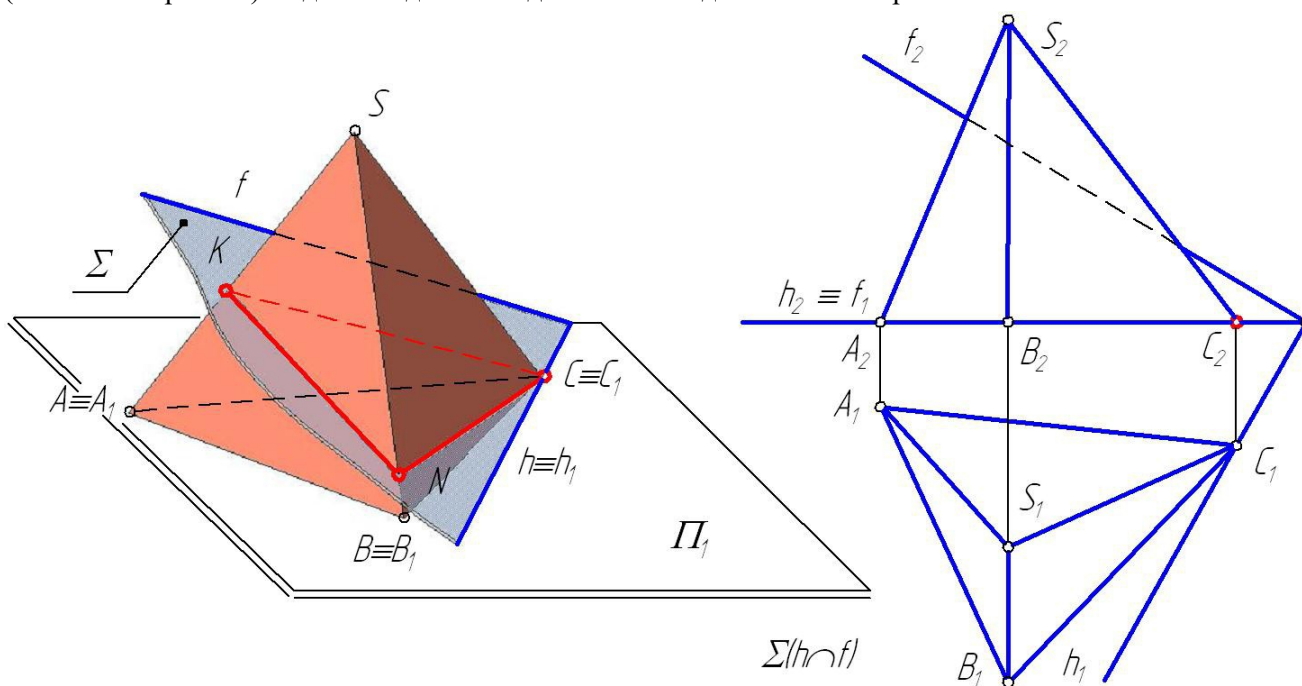


Рис. 2.17

На рисунке 2.17 и приведена пирамида с треугольным основанием  $ABC$  и вершиной  $S$ , которую пересекает плоскость общего положения  $\Sigma(h \cap f)$ . Плоскость задана таким образом, что пересекает только боковую поверхность пирамиды. Следовательно, сечение имеет треугольную форму.

Пирамида стоит на горизонтальной плоскости проекций. Горизонталь плоскости  $h$  также находится в этой плоскости проекций и проходит через одну из вершин основания (точку  $C$ ). Эта точка и является одной из трех точек сечения. Две другие точки сечения находятся на ребрах  $SA$  и  $SB$ . Они могут быть определены с помощью дополнительной горизонтально-проецирующей плоскости  $\Lambda$  (рис.2.18, 2.19).

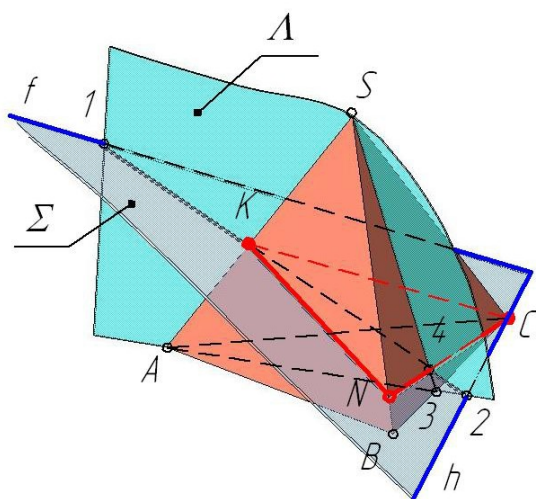


Рис. 2.18

Точка  $K$ , принадлежащая ребру  $SA$ , найдена «способом ребер»: плоскость  $\Lambda$ , проходящая через ребро  $SA$ , пересекает плоскость  $\Sigma$  по линии  $(1-2)$ , эта линия, в свою очередь, пересекает ребро  $SA$  в точке  $K$ .

Точка  $N$ , принадлежащая ребру  $SB$ , найдена «способом граней». Плоскость  $\Sigma$  пересекается с гранью пирамиды  $SBC$  по прямой, проходящей через точку  $C$ . Вторая точка линии пересечения плоскостей (точка 4) определяется с помощью плоскости  $\Lambda$ , пересекающей плоскость  $\Sigma$  по линии  $(1-2)$ , а грань  $SBC$  по образующей  $S3$ . Точка  $N$  находится на пересечении ребра  $SB$  с линией пересечения плоскостей  $(C-4)$ .

Для улучшения наглядности изображения в графических работах необходимо показать видимость:

- 1) сечения относительно поверхности многогранника;
- 2) поверхности относительно заданной плоскости;
- 3) геометрических элементов, которыми задана плоскость, относительно поверхности многогранника.

1.  $C \in h$  по условию
2.  $SA \cap \Sigma = K$ :
  - 1)  $SA \subset \Lambda / \Lambda_2 \perp \Pi_1$
  - 2)  $\Lambda \cap \Sigma = (1-2)$
  - 3)  $(1-2) \cap SA = K$
3.  $SB \cap \Sigma = N$ :
  - 1)  $\Lambda / \Lambda_1 \perp \Pi_1$
  - 2)  $\Lambda \cap \Sigma = (1-2)$
  - 3)  $\Lambda \cap SBC = S-3$
  - 4)  $(1-2) \cap S-3 = 4$
  - 5)  $(C-4) \cap SB = N$
4.  $\Sigma \cap \Phi_{\text{нур}} = \Delta CKN$

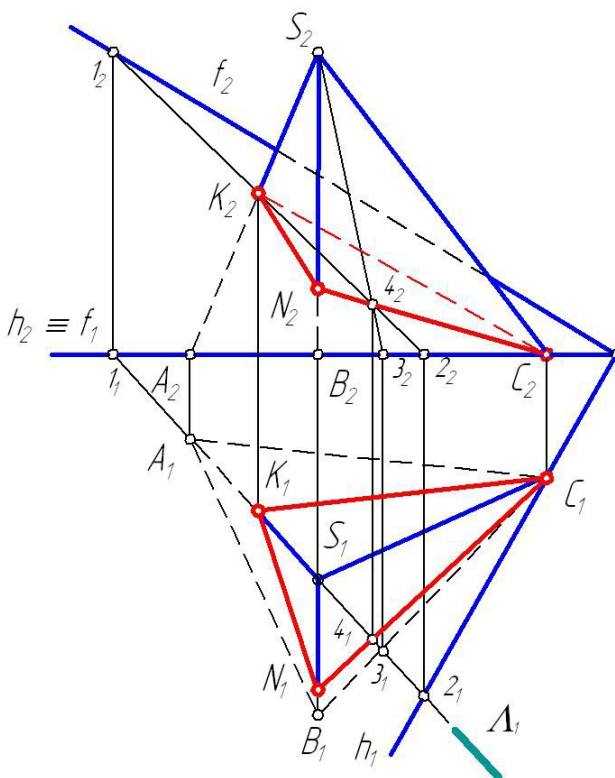


Рис. 2.19

**Частный случай.** Построение линии пересечения многогранника с проецирующей плоскостью.

Задача на нахождение линии пересечения поверхности с проецирующей плоскостью решается без применения дополнительных секущих плоскостей. Одна из проекций линии сечения определяется исходя из принадлежности проецирующей плоскости (она проецируется на след проекций заданной плоскости). Другие проекции определяются по принадлежности линии сечения поверхности.

На рисунке 2.20 задана пирамида, пересекающаяся профильно-проецирующей плоскостью. Т.к. профильный след такой плоскости является следом проекций, сначала строится профильная проекция линии пересечения, горизонтальная и фронтальная проекции определяются по линиям связи.



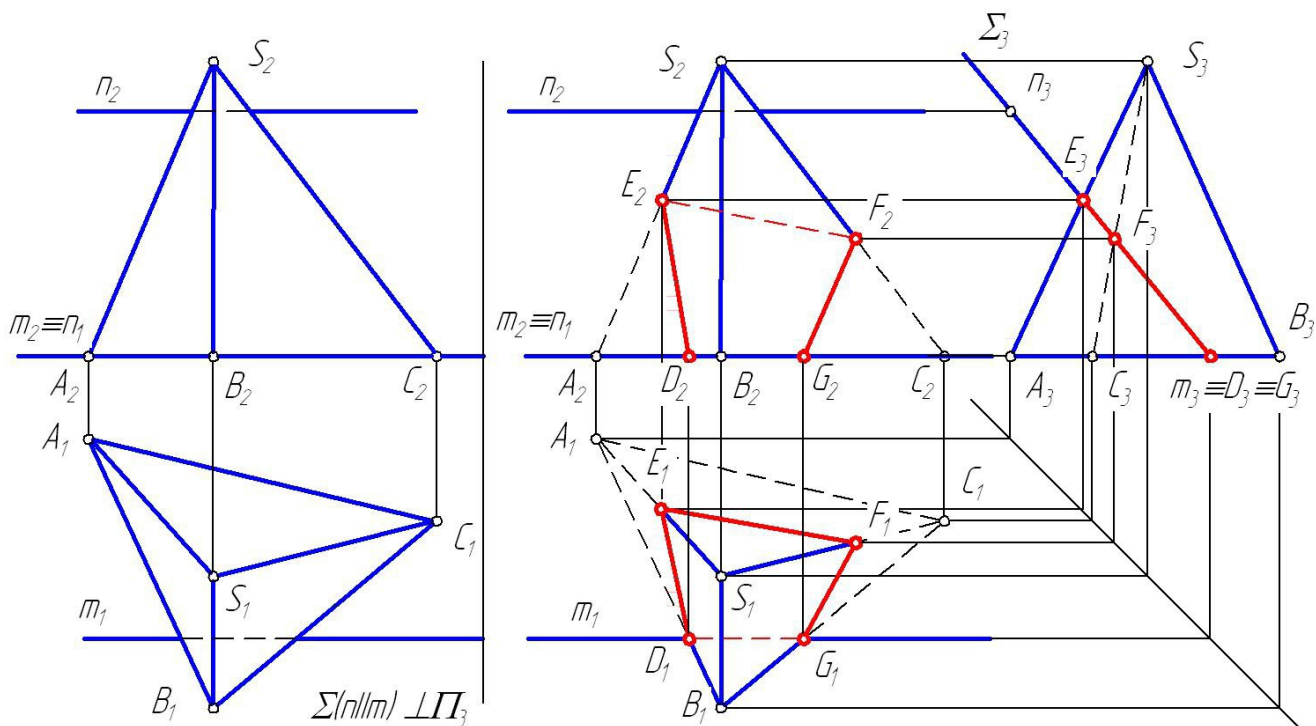


Рис. 2.20

**Приведение общего случая к частному.**

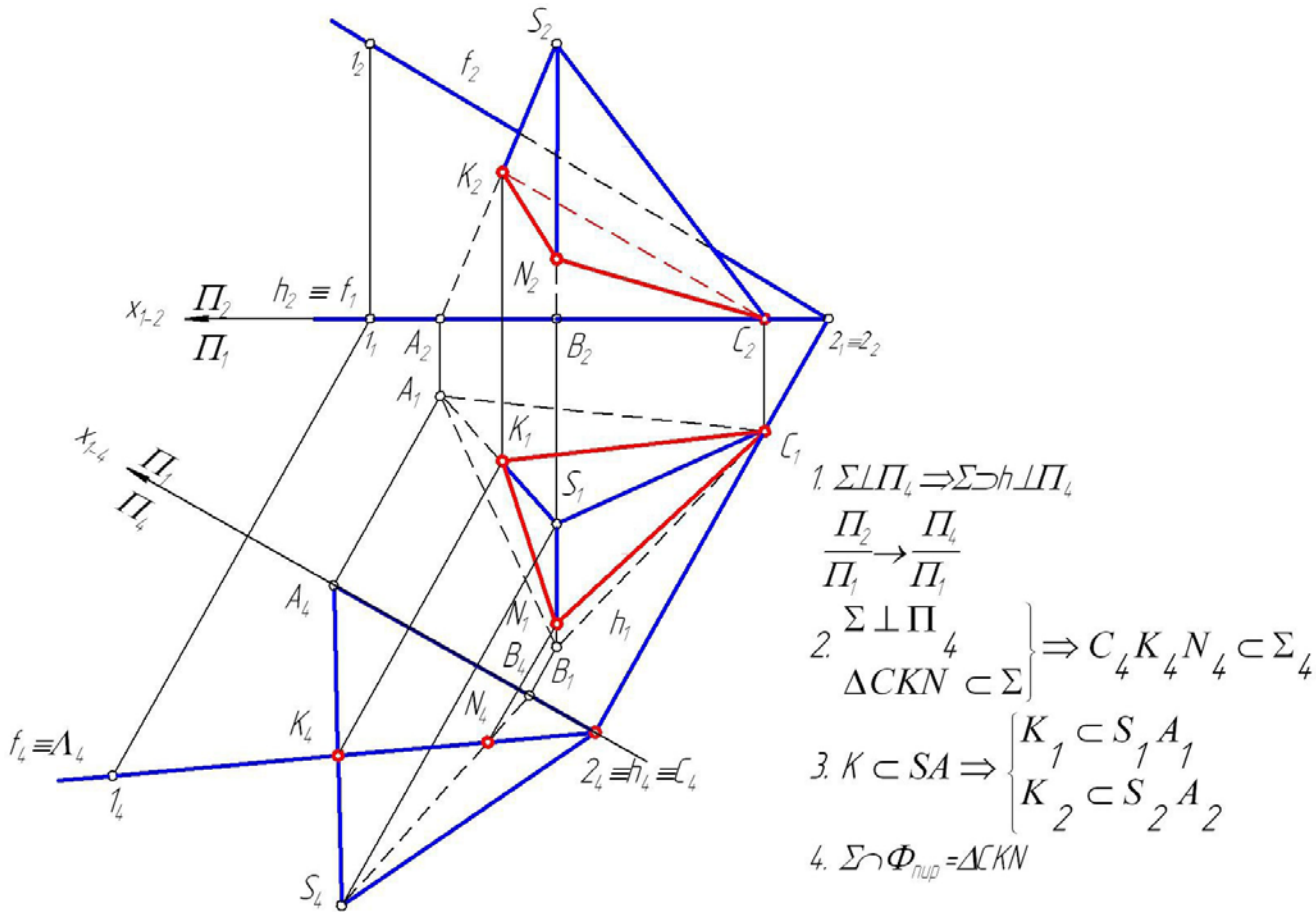


Рис. 2.21

Из предыдущего примера видно, что задача решается намного проще, если задана проецирующая плоскость. Используя методы преобразования КЧ возможно привести задачу на нахождение линии пересечения поверхности с плоскостью общего положения к частному случаю.

На рисунке 2.21 с помощью метода замены плоскостей проекций плоскость общего положения преобразована в проецирующую плоскость относительно новой плоскости проекций  $\Pi_4$ .<sup>2</sup>

### Пересечение плоскости с поверхностью вращения

Форма сечения поверхности вращения зависит от угла наклона плоскости к оси вращения поверхности.

Если секущая плоскость:

- 1) перпендикулярна оси вращения, сечение – окружность;
- 2) наклонена к оси и пересекает все образующие – эллипс;
- 3) параллельна одной образующей – парабола;
- 4) параллельна двум образующим – гипербола;
- 5) проходит через вершину – две пересекающиеся прямые;
- 6) касается поверхности – прямая.

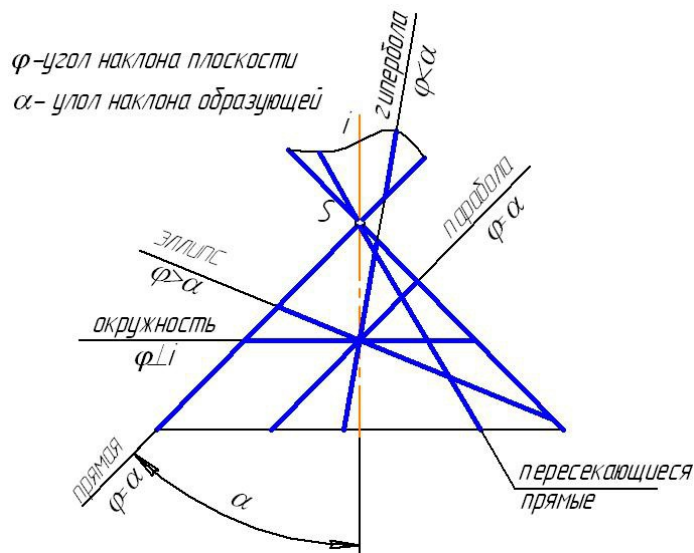
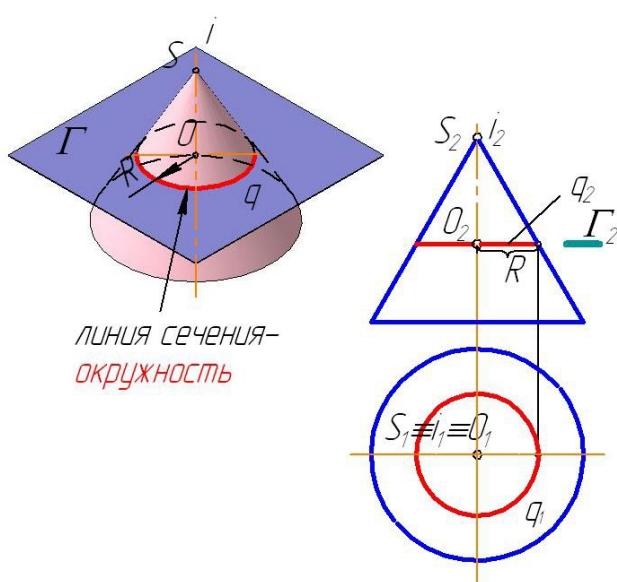


Рис. 2.22

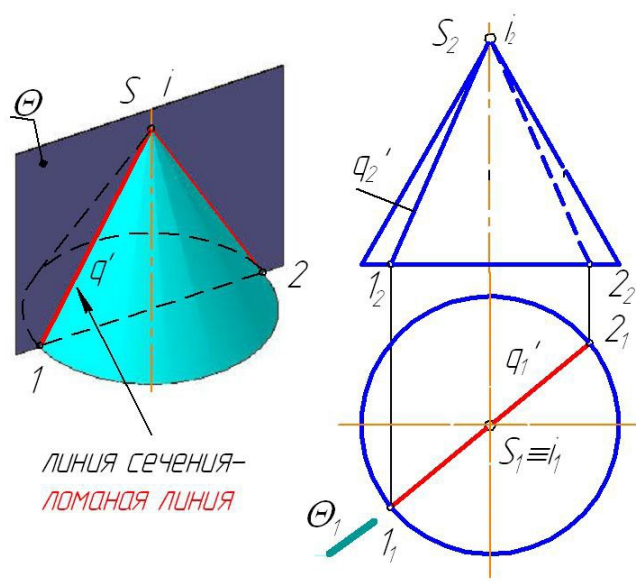
Вся совокупность этих линий может быть получена при пересечении конуса плоскостью. Поэтому их называют коническими сечениями, или **кониками**.

**Частный случай.** Построение линии пересечения с проецирующей плоскостью или плоскостью уровня.



$$\Gamma(\Gamma_2) \perp i \Rightarrow \Gamma(\Gamma_2) \cap \Phi_K = q(0, R)$$

Рис. 2.23



$$S \in i \subset \Theta \Rightarrow \Theta \cap \Phi_K = 1S \cup S2 = q'$$

Рис. 2.24

На КЧ рисунков 2.23-2.26 и рисунке 3.54 приведены примеры пересечения поверхностей вращения с плоскостями частного положения. Во всех этих случаях первоначально известна одна из проекций линии пересечения, она проецируется в линию на след проекций секущей плоскости. Вторая, неизвестная проекция определяется исходя из принадлежности линии пересечения поверхности. Т.е. задача сводится к задаче на нахождение недостающих проекций точек, принадлежащих поверх-

<sup>2</sup> См. Методы преобразования комплексного чертежа, третья основная задача начертательной геометрии.

ности вращения. На рис. 3.50-3.53 их определяют с помощью образующих или параллелей поверхности.<sup>3</sup> На рис. 3.54 изначально определена не только профильная проекций линии сечения, лежащая на следе проекций плоскости, но и горизонтальная проекция, совпадающая с горизонтальным очерком проецирующей поверхности по отношению к горизонтальной плоскости проекций.<sup>4</sup> В этом случае нахождение фронтальных проекций точек сводится к задаче на нахождение проекций точек по двум заданным.<sup>5</sup>

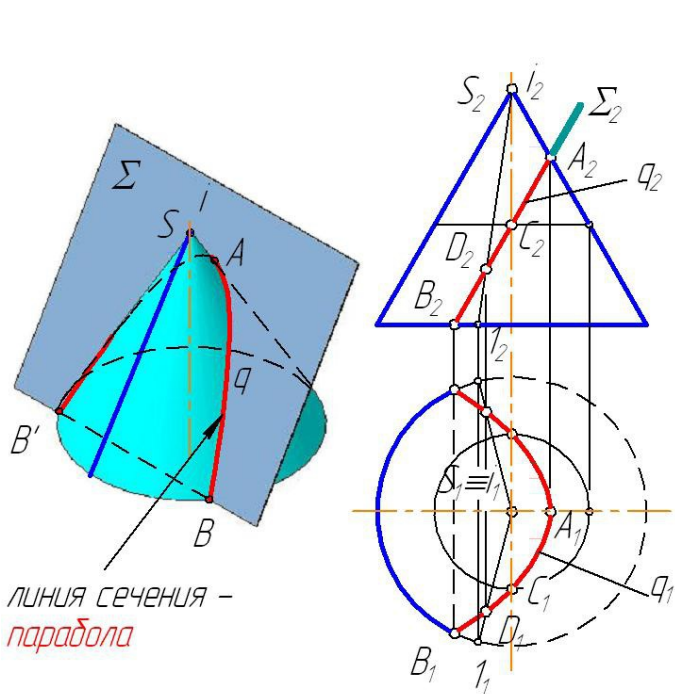


Рис. 2.25

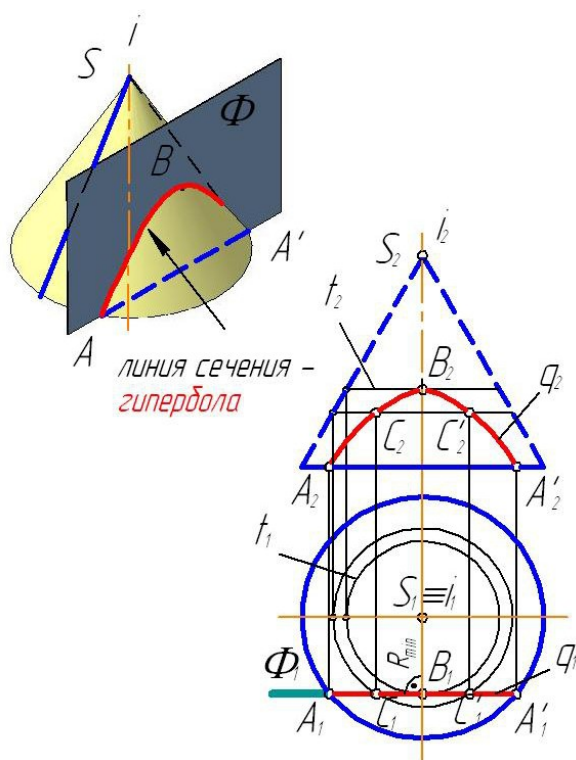


Рис. 2.26

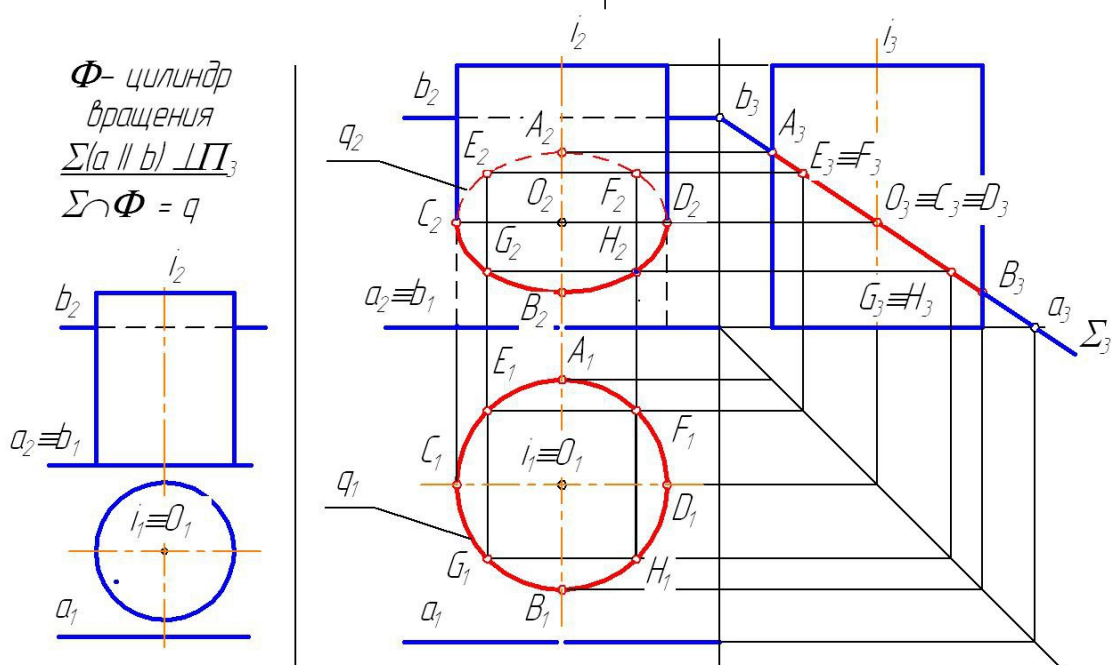


Рис. 2.27

<sup>3</sup> См. «Принадлежность точки поверхности»: общий случай.

<sup>4</sup> См.: «Принадлежность точки поверхности»: частный случай.

<sup>5</sup> См.: «Комплексный чертеж точки».

**Общий случай.** Построение линии пересечения с плоскостью общего положения.

Для построения линии пересечения необходимо найти общие точки поверхности и заданной плоскости. Для определения этих точек в общем случае необходимо ввести дополнительные секущие плоскости. Их выбирают таким образом, чтобы в результате при пересечении поверхности получились наиболее простые линии сечения – окружности или ломаные прямые.

Построение линии сечения начинают с нахождения **характерных точек сечения**, к которым относятся:

- 1) высшая и низшая точки;
- 2) крайняя левая и крайняя правая точки, в которых проекции линии сечения касаются очерковых образующих (точки, лежащие на границе видимости);
- 3) ближайшая и наиболее удаленная точки сечения.

Рассмотрим пересечение конуса плоскостью общего положения  $\Sigma (h \cap f)$  (рис. 2.28).

Прежде чем приступить к непосредственному построению точек, принадлежащих линии сечения, необходимо проанализировать условие задачи: выявить, пересекает ли плоскость основание поверхности, а также как она располагается по отношению к оси вращения и образующим поверхности, от этого зависит форма линии сечения. Если известен вид кривой, которая должна быть получена в конечном результате, можно рациональнее подбирать дополнительные плоскости для нахождения точек линии сечения и избежать лишних построений.

В данной задаче плоскость конус стоит на горизонтальной плоскости проекций, там же находится горизонталь плоскости. Основание и горизонталь не пересекаются, следовательно, плоскость основания не пересекает. Из этого можно сделать вывод, что плоскость общего положения пересекает все образующие поверхности и формой линии сечения является эллипс.

В ходе построения проекций линии сечения необходимо найти ее характерные точки. Для сечения, имеющей сечение в форме эллипса, такими точками в первую очередь являются центр и точки большой и малой оси.

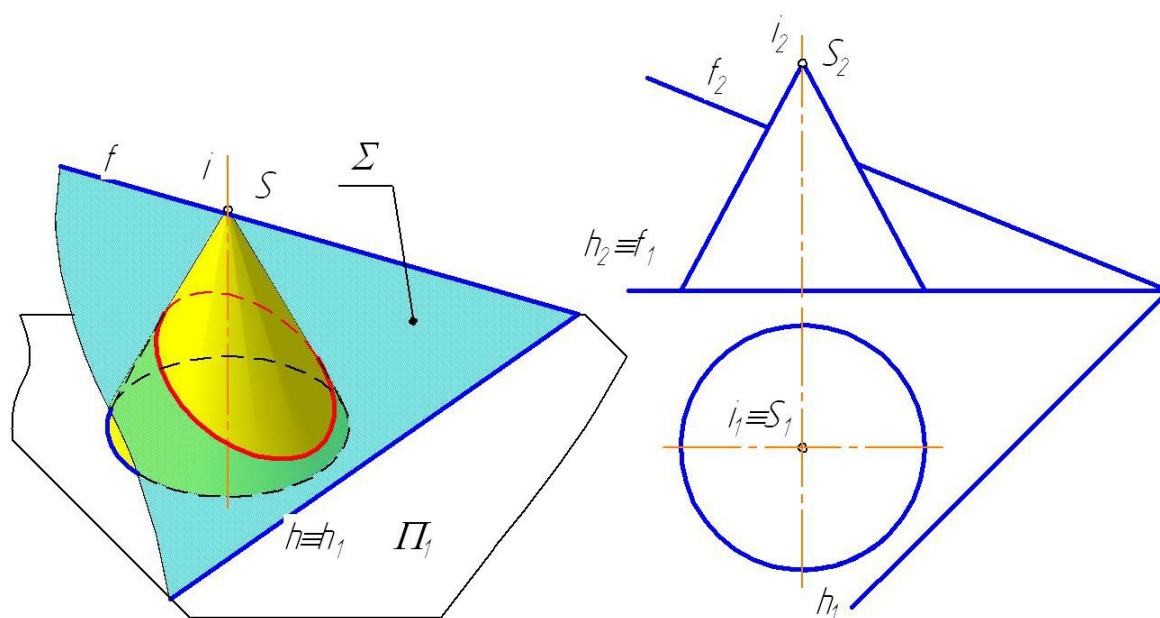


Рис. 2.28

**Высшая и низшая точки сечения** (рис. 2.29), они же точки большой оси эллипса ( $A, B$ ), располагаются на линии наибольшего наклона (прямая  $l$ ) плоскости  $\Sigma$  к плоскости основания конуса (в данном примере к горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$ ). Необходимо подобрать вспомогательную плоскость  $\Lambda$  так, чтобы она пересекала заданную плоскость по ее линии наибольшего наклона.



Т.к. линия наибольшего наклона перпендикулярна линии уровня плоскости<sup>6</sup> (в данном примере к горизонтали  $h$ ), дополнительная плоскость также ей перпендикулярна. Эта плоскость должна проходить через ось вращения конуса, а, следовательно, пересекать его по образующим.

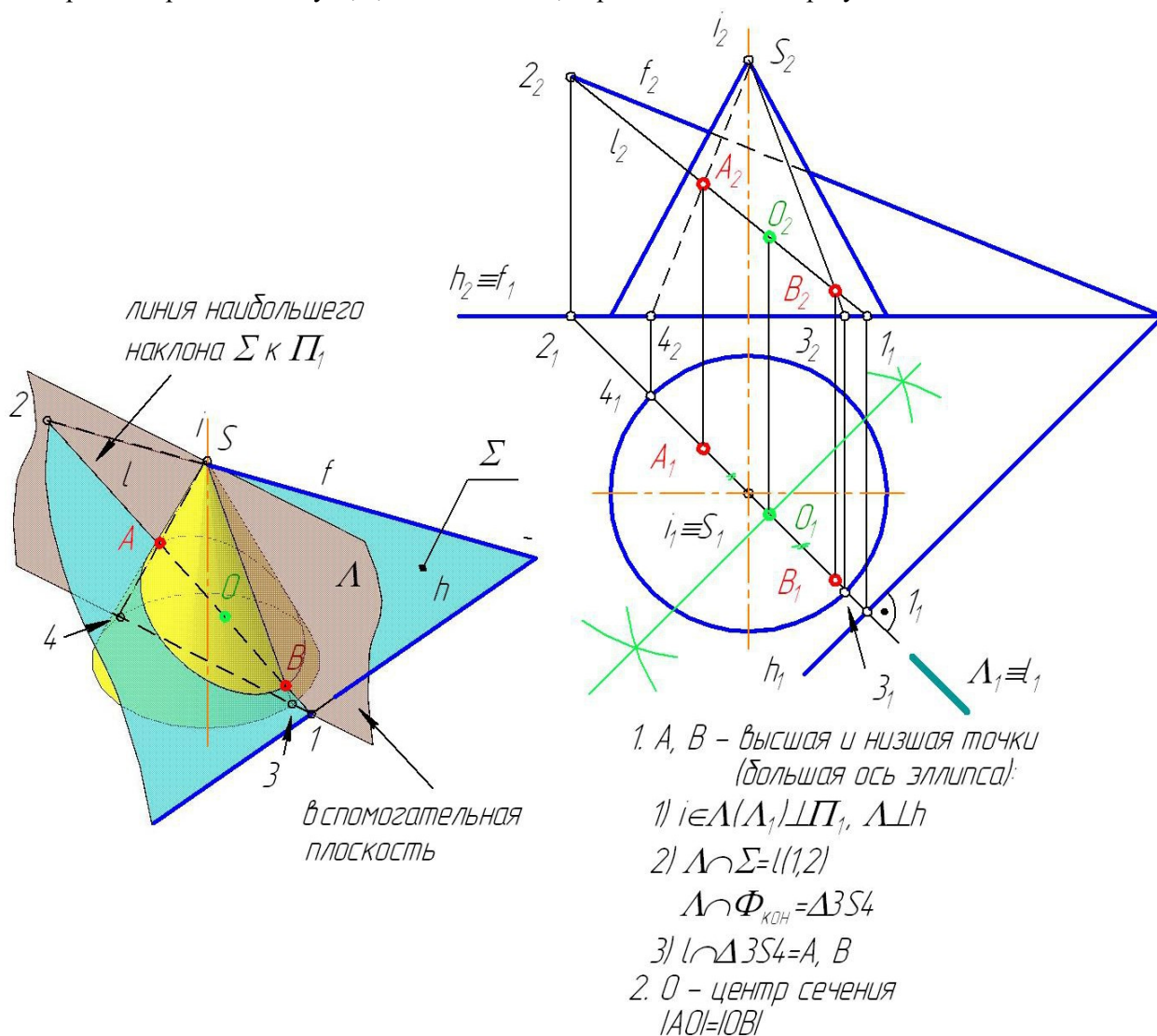


Рис. 2.29

**Центр линии сечения** (точка  $O$ ) конуса не располагается на оси вращения. Место его положения находят разделив отрезок  $AB$  пополам.

**Малая ось эллипса** (точки  $C, D$ ) перпендикулярна линии наибольшего наклона, т.е. лежит на горизонтали плоскости  $\Sigma$ . Их определяют с помощью горизонтальной плоскости уровня  $\Gamma$ , пересекающей заданную плоскость по этой горизонтали, а поверхность конуса по параллели (на рис. 2.30 предыдущие построения не приведены).

**Точки границы видимости** ( $E, F$ ) линии сечения относительно фронтальной плоскости проекций лежат на фронтальных очерковых образующих конуса. Они определяются с помощью фронтальной плоскости уровня, пересекающей поверхность по этим образующим, а заданную плоскость – по фронтали (рис. 2.31).

Промежуточные точки линии сечения при необходимости можно определить с помощью вспомогательных горизонтальных плоскостей или горизонтально проецирующих, проходящих через ось вращения конуса.

После построения точек, принадлежащих линии сечения, их необходимо соединить между собой плоской линией с учетом видимости. Относительно горизонтальной плоскости проекций линия

<sup>6</sup> См.: Линии особого положения плоскости.

сечения видна полностью, т.к. видна вся боковая поверхность конуса. Относительно фронтальной плоскости проекций видна та часть линии сечения, которая находится перед плоскостью  $\Phi$  (рис 3.32). Также необходимо определить видимость поверхности относительно плоскости: наклон заданной плоскости таков, что она скрывает нижнюю отсеченную часть поверхности конуса.

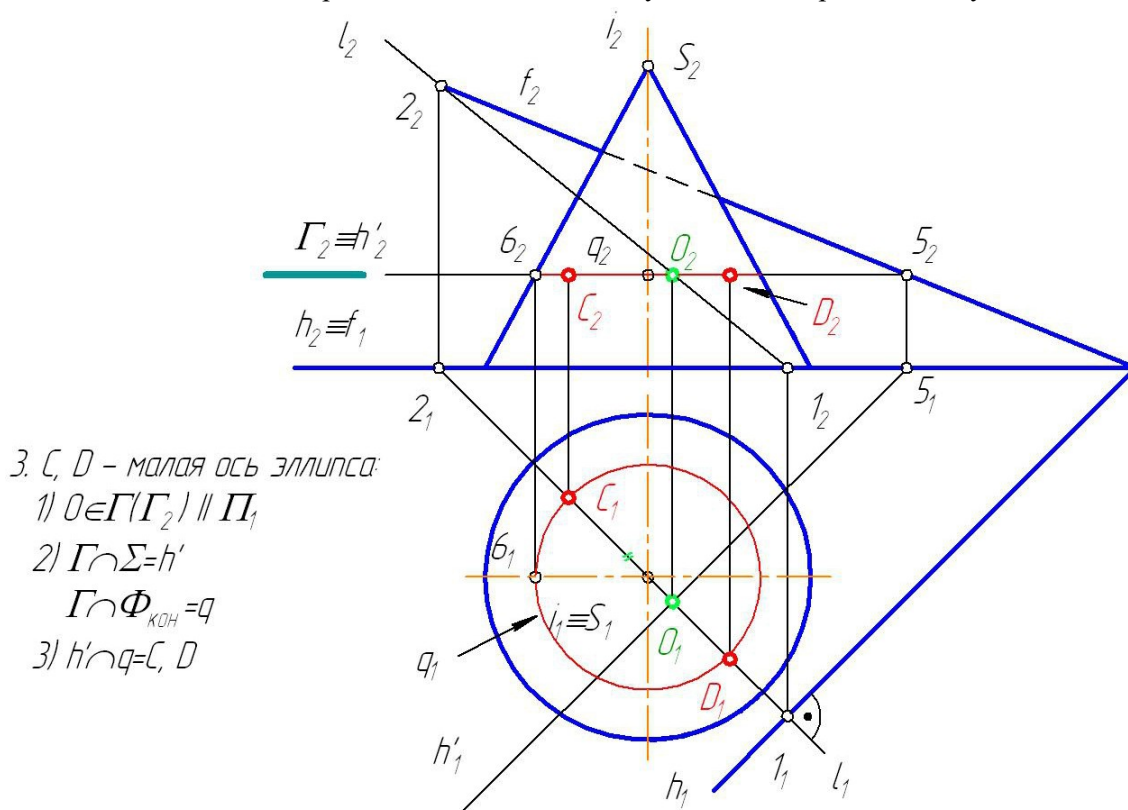


Рис. 2.30

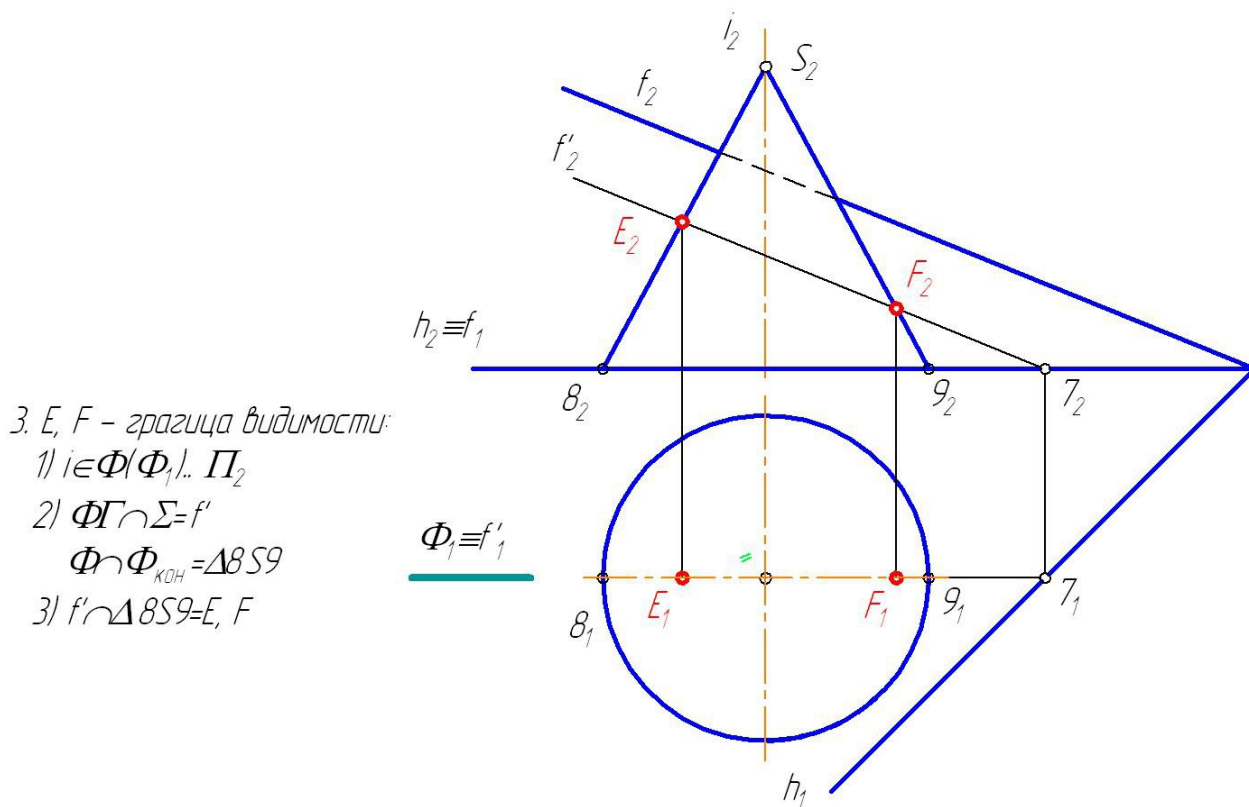


Рис. 2.31

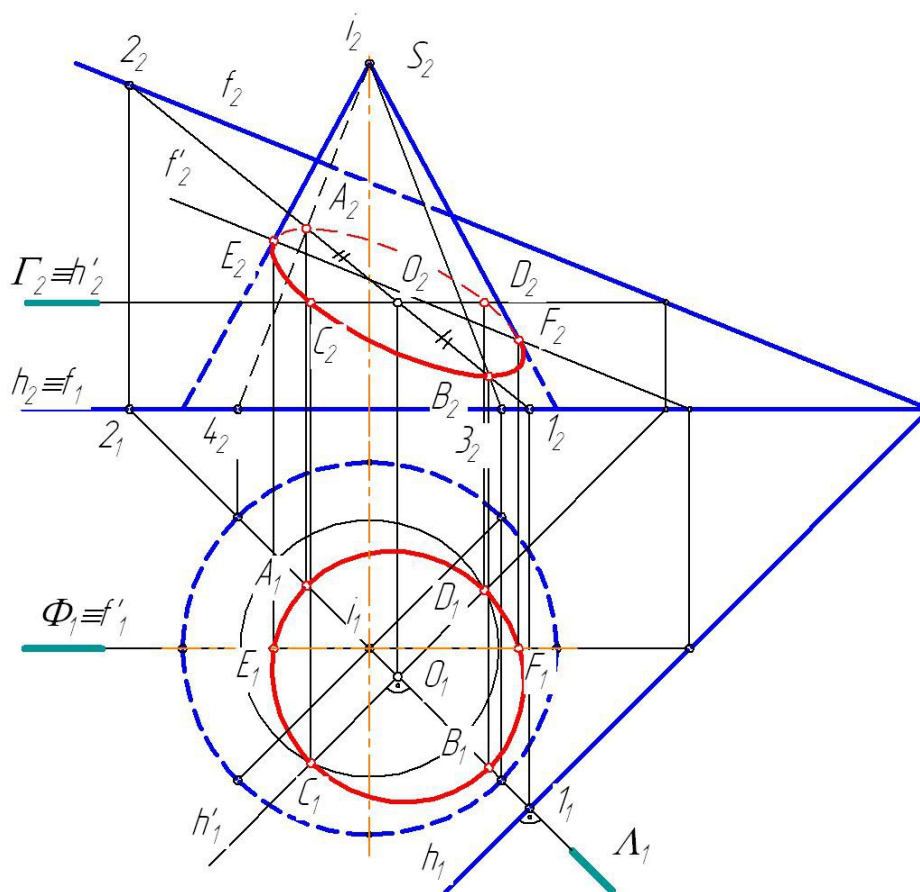
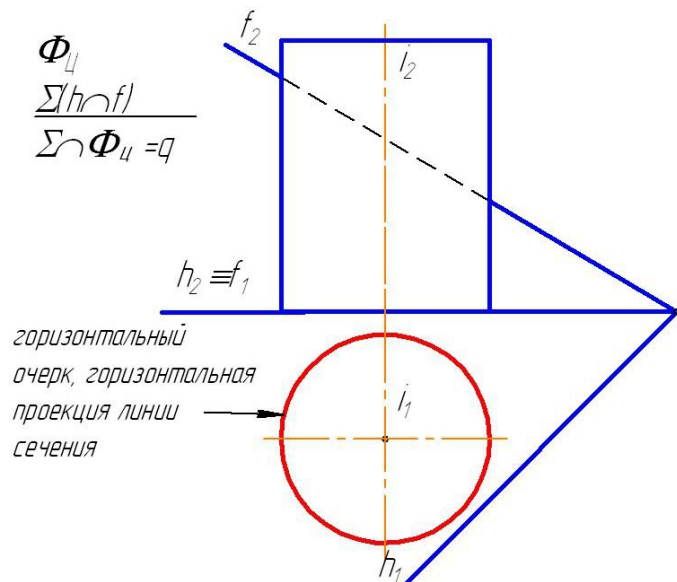


Рис. 2.32

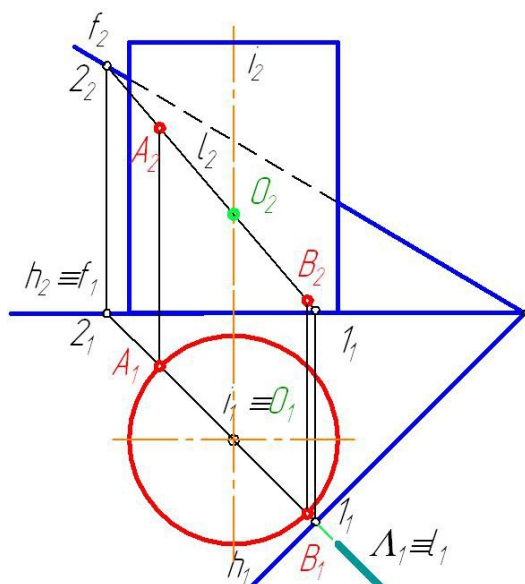
### Примеры решения задач

**Пример 1.** Построить линию сечения цилиндра плоскостью общего положения общим методом.

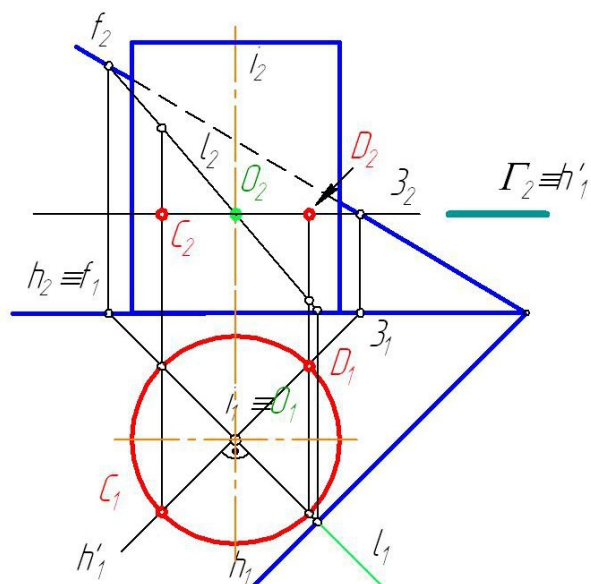


Линия пересечения прямого кругового цилиндра с плоскостью общего положения - эллипс. Задача решается аналогично задаче на построение линии пересечения конуса с плоскостью общего положения. Разница заключается в том, что в данном случае изначально известна горизонтальная проекция линии пересечения: все образующие цилиндра перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, следовательно, находящиеся на них точки линии сечения проецируются на горизонтальный очерк поверхности.

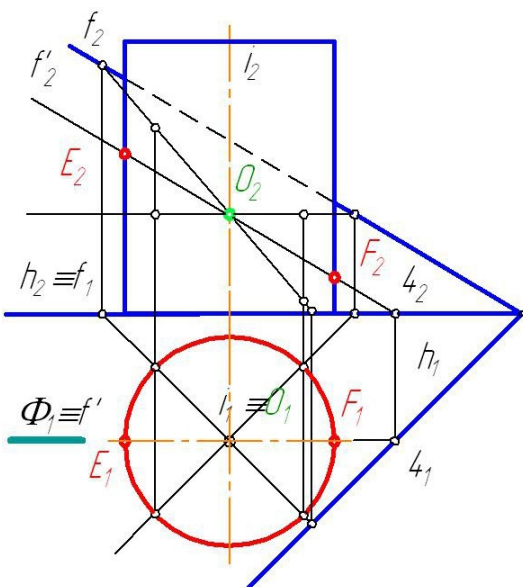
Центр сечения находится на оси вращения, в месте пересечения ее с линией наибольшего наклона плоскости к плоскости основания поверхности.



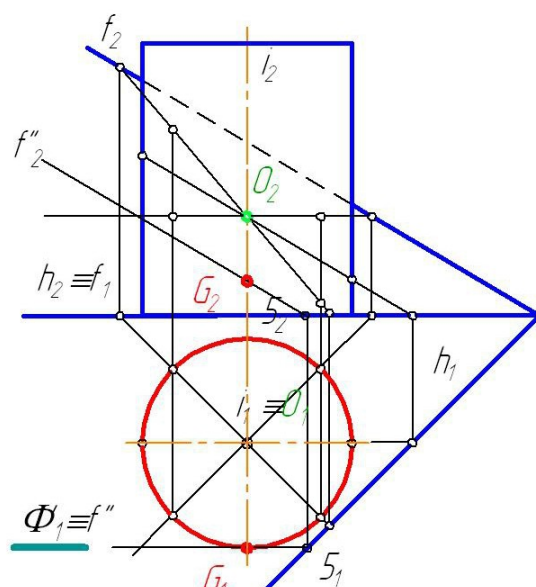
1.  $A, B$  – высшая и низшая точки (дольная ось эллипса):
  - 1)  $i \in \Lambda(\Lambda_1) \perp \Pi_1, \Lambda \perp h$
  - 2)  $\Lambda \cap \Sigma = l$
  - 3)  $l \cap \Phi_U = A, B$
2.  $l \cap i = O$  – центр сечения



3.  $C, D$  – малая ось эллипса:
  - 1)  $O \in \Gamma(\Gamma_2) \parallel \Pi_2$
  - 2)  $\Gamma \cap \Sigma = h'$
  - 3)  $h' \cap \Phi_U = C, D$



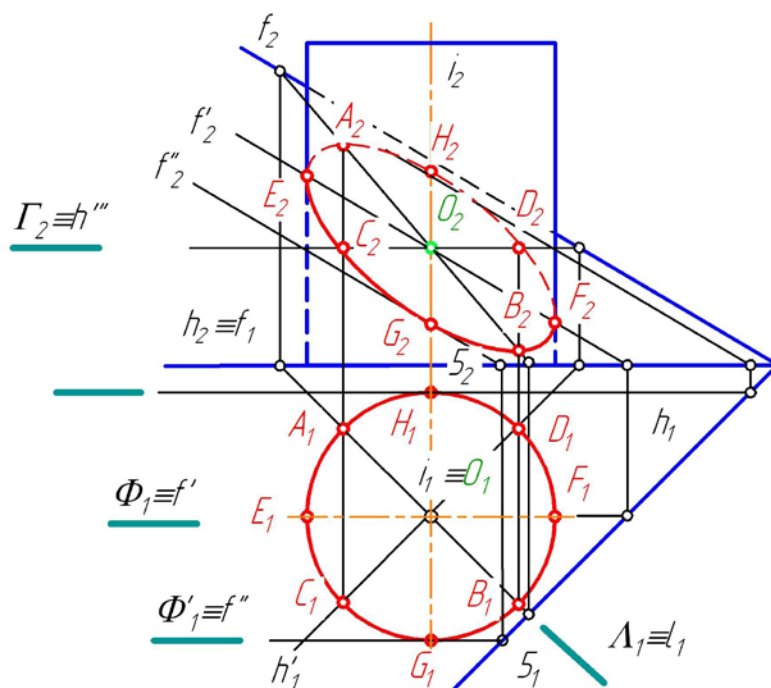
4.  $E, F$  – точки границы видимости:
  - 1)  $i \in \Phi(\Phi_1) \parallel \Pi_1$
  - 2)  $\Phi \cap \Sigma = f'$
  - 3)  $f' \cap \Phi_U = E, F$



5.  $G$  – ближайшая точка:
  - 1)  $\Phi(\Phi_1) \parallel \Pi_1$
  - 2)  $\Phi \cap \Sigma = f''$
  - 3)  $f'' \cap \Phi_U = G$

Ближайшая и наиболее удаленная точки сечения (точки  $G, H$ ) определяются с помощью фронтальных плоскостей, касающихся поверхности.

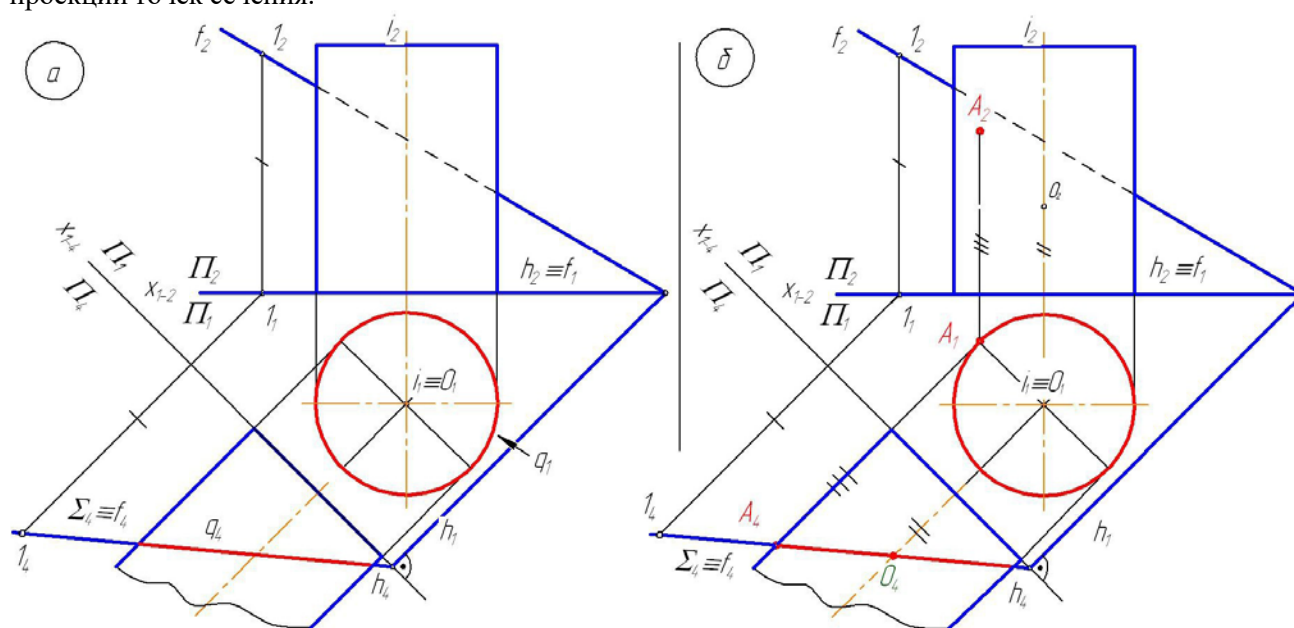




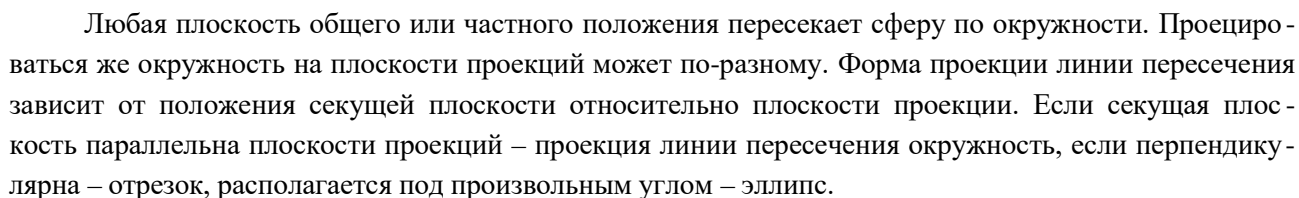
**Пример 2.** Построить линию сечения цилиндра плоскостью общего положения методом замены плоскостей проекций

Предыдущую задачу можно решить проще, если заданную плоскость общего положения преобразовать в проецирующую плоскость.<sup>7</sup> Это преобразование осуществляется методом замены плоскостей проекций.

В данном примере плоскость общего положения  $\Sigma$ , посредством горизонтали плоскости  $h$ , преобразована в проецирующую плоскость относительно новой плоскости проекций  $\Pi_4$ . При этом проекция линии пересечения проецируется на след плоскости. Далее на плоскостях проекций  $\Pi_1$  и  $\Pi_4$  указываются проекции характерных точек сечения и определяются недостающие фронтальные проекции точек сечения.



<sup>7</sup> См.: Третья основная задача начертательной геометрии.



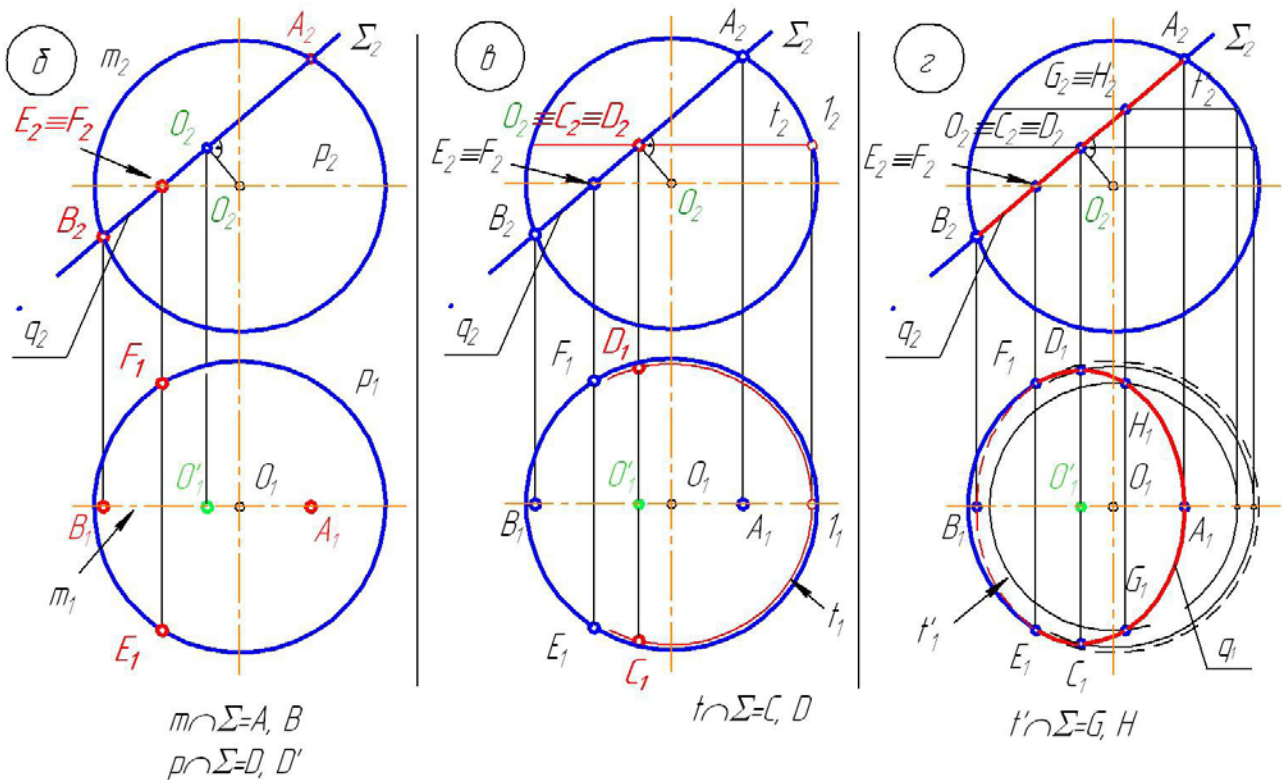
34

Горизонтальные проекции характерных точек сечения определяются исходя из принадлежности их поверхности – они находятся на параллелях сферы.

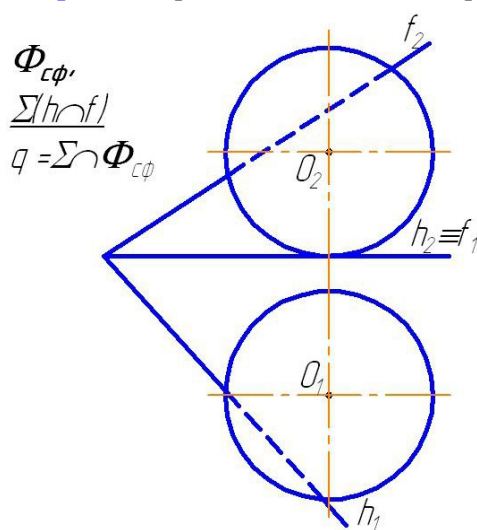
Высшая и низшая точки сечения ( $A, B$ ) располагаются на фронтальном очерковом меридиане  $m$ , точки границы видимости ( $E, F$ ) по отношению к горизонтальной плоскости проекций – на экваторе  $t$  (рис. б).

Точки большой оси эллипса (горизонтальной проекции линии пересечения)  $C, D$  принадлежат параллели сферы  $t$ , плоскость которой проходит через центр сечения (рис. в).

Для более точного построения линии пересечения можно найти еще несколько точек, они также будут располагаться на параллелях сферы, например, точки  $H$  и  $G$ , принадлежащие параллели  $t'$  (рис. г).



**Пример 4.** Построить линию сечения сферы плоскостью общего положения.



Форма линии сечения – окружность, проецирующаяся на фронтальную и горизонтальную плоскости проекций в виде эллипсов.

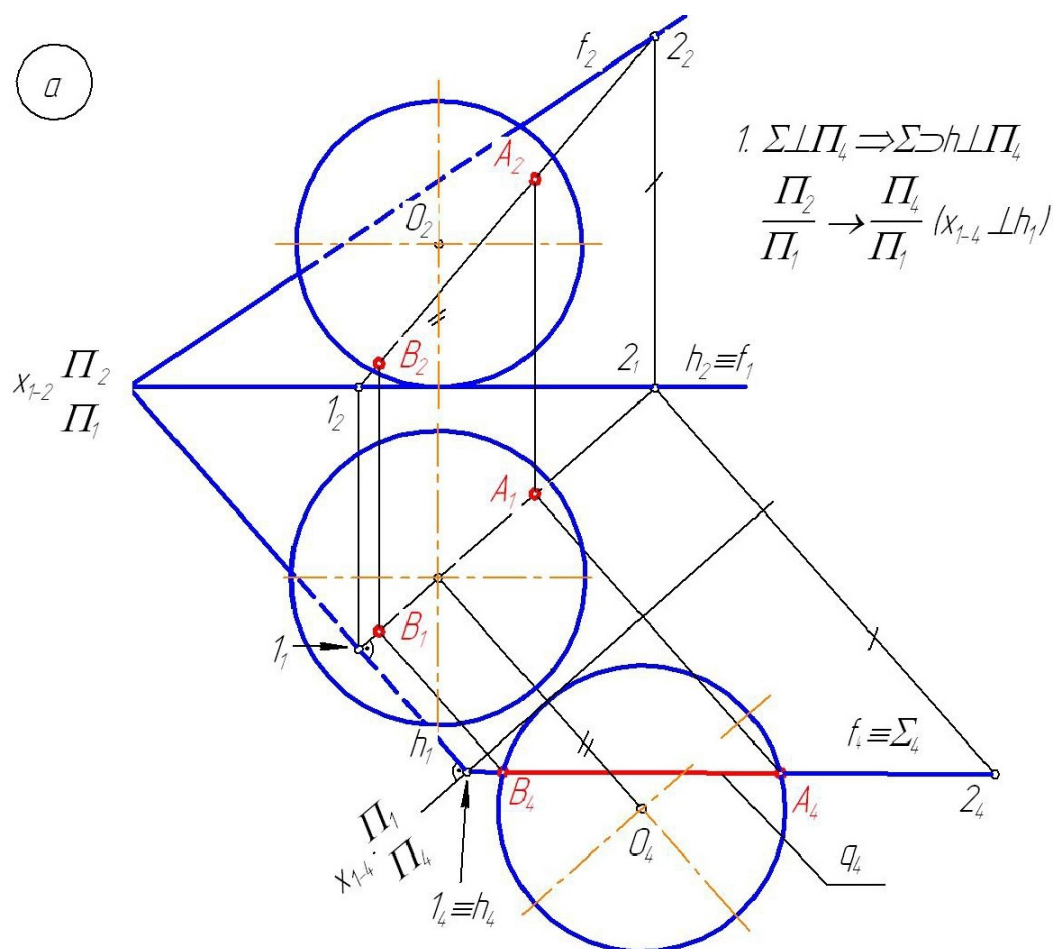
Высшая и низшая точки сечения  $A, B$  (большая ось «эллипса») лежат на линии наибольшего наклона  $(1,2)$  заданной плоскости  $\Sigma$  к горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  и определяются методом замены плоскостей проекций (рис. а). Точки  $A$  и  $B$  также являются точками одной из осей эллипса (горизонтальной проекции сечения).

Центр сечения (точка  $O'$ ) определяется также как в предыдущем примере (рис. б).

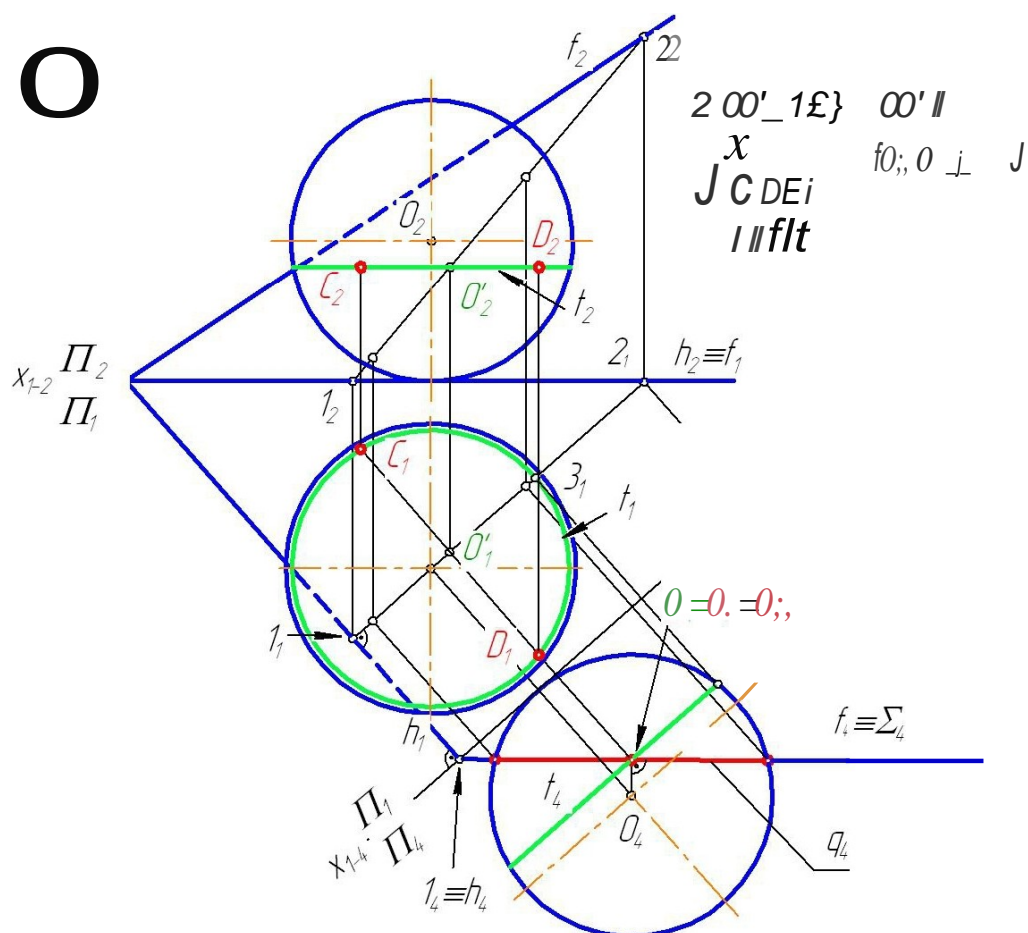
Вторая ось эллипса-проекции (точки  $C, D$ ) находится на параллели сферы  $t$  (рис. б).

Точки границы видимости линии сечения по отношению к горизонтальной (точки  $G, H$ ) и фронтальной (точки  $E, F$ ) плоскостям проекций определяются с помощью плоскостей уровня  $\Phi(\Phi_1)$  и  $\Gamma(\Gamma_2)$ , пересекающих заданную плоскость  $\Sigma$  по линиям уровня (рис. в, предыдущие построения не показаны). Полученные точки соединяются с учетом видимости (рис. г).

a



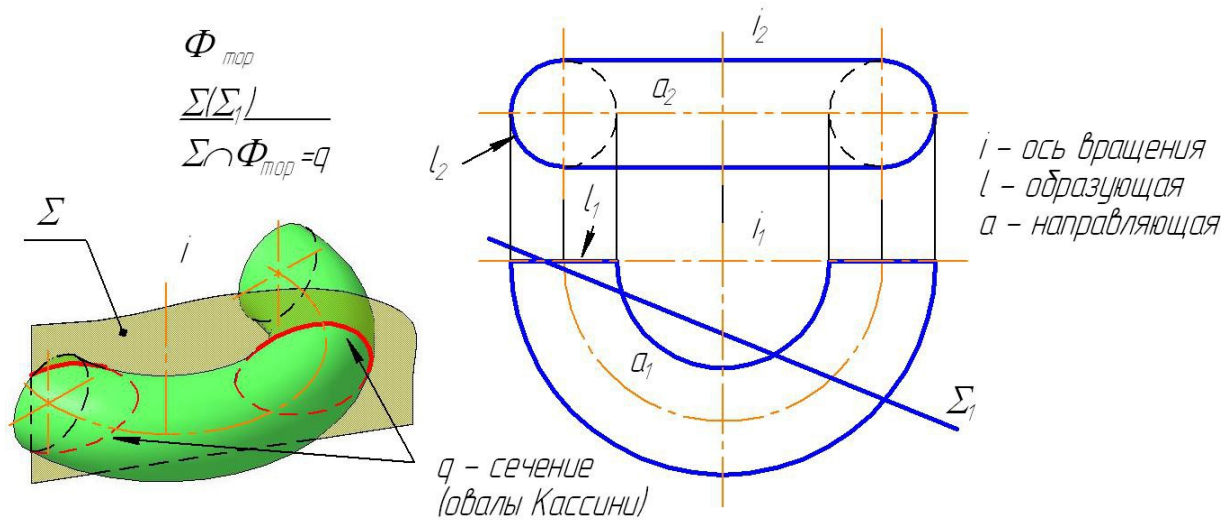
O







**Пример 5.** Построить линию пересечения тора плоскостью  $\Sigma$  ( $\Sigma_1$ ).



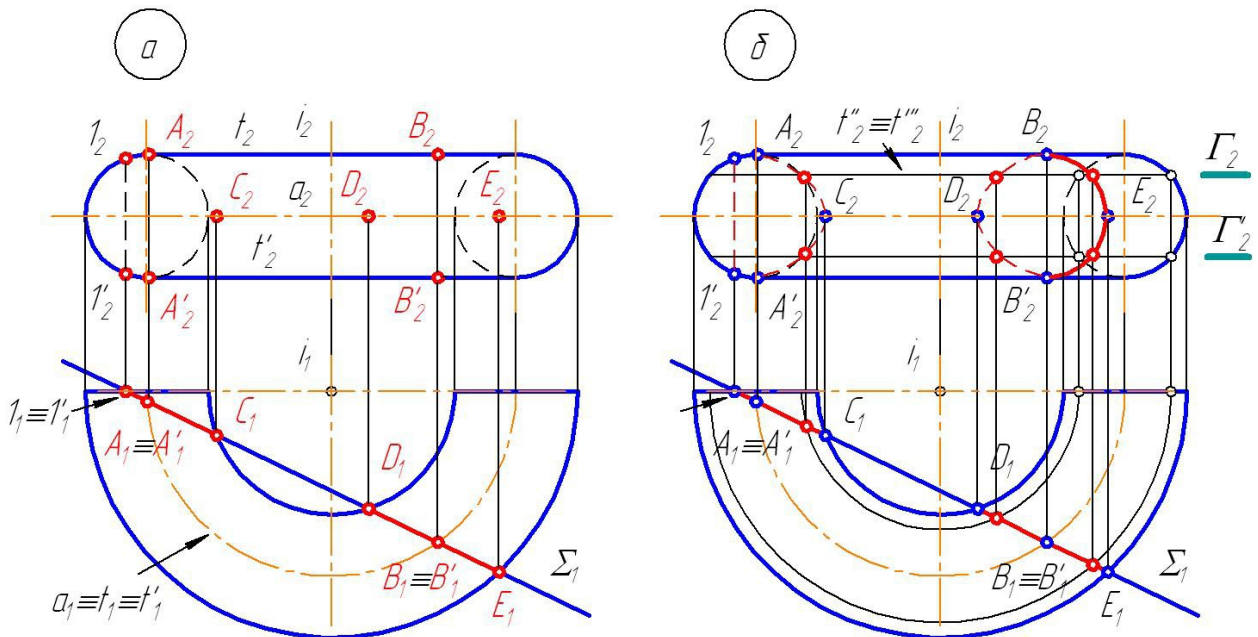
Форма линии пересечения тора плоскостью зависит не только от угла наклона ее к оси вращения, но и расстояния до нее.

В данном примере горизонтально-проецирующая плоскость  $\Sigma$  параллельна оси вращения тора и удалена от нее на расстояние меньше, чем разность радиусов направляющей и образующей. В этом случае получаемая в результате пересечения линия называется овалами Кассини.

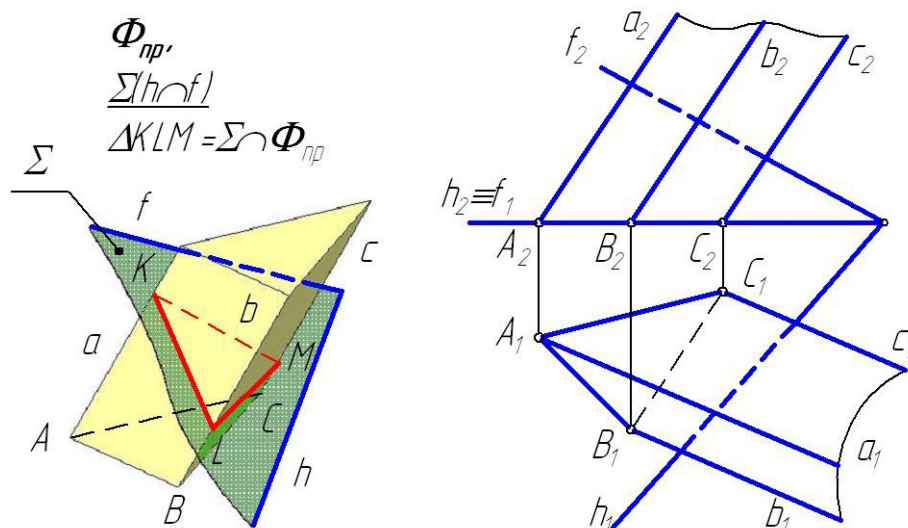
Т.к. задана плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций, изначально известна горизонтальная проекция линии пересечения, совпадающая со следом плоскости.

Вышие и низшие точки сечения лежат на верхней и нижней параллели тора (точки  $A, A', B, B'$ ). Также к характерным точкам линии сечения относятся точки, лежащие на горизонтальных очерковых параллелях ( $C, D, E$ ).

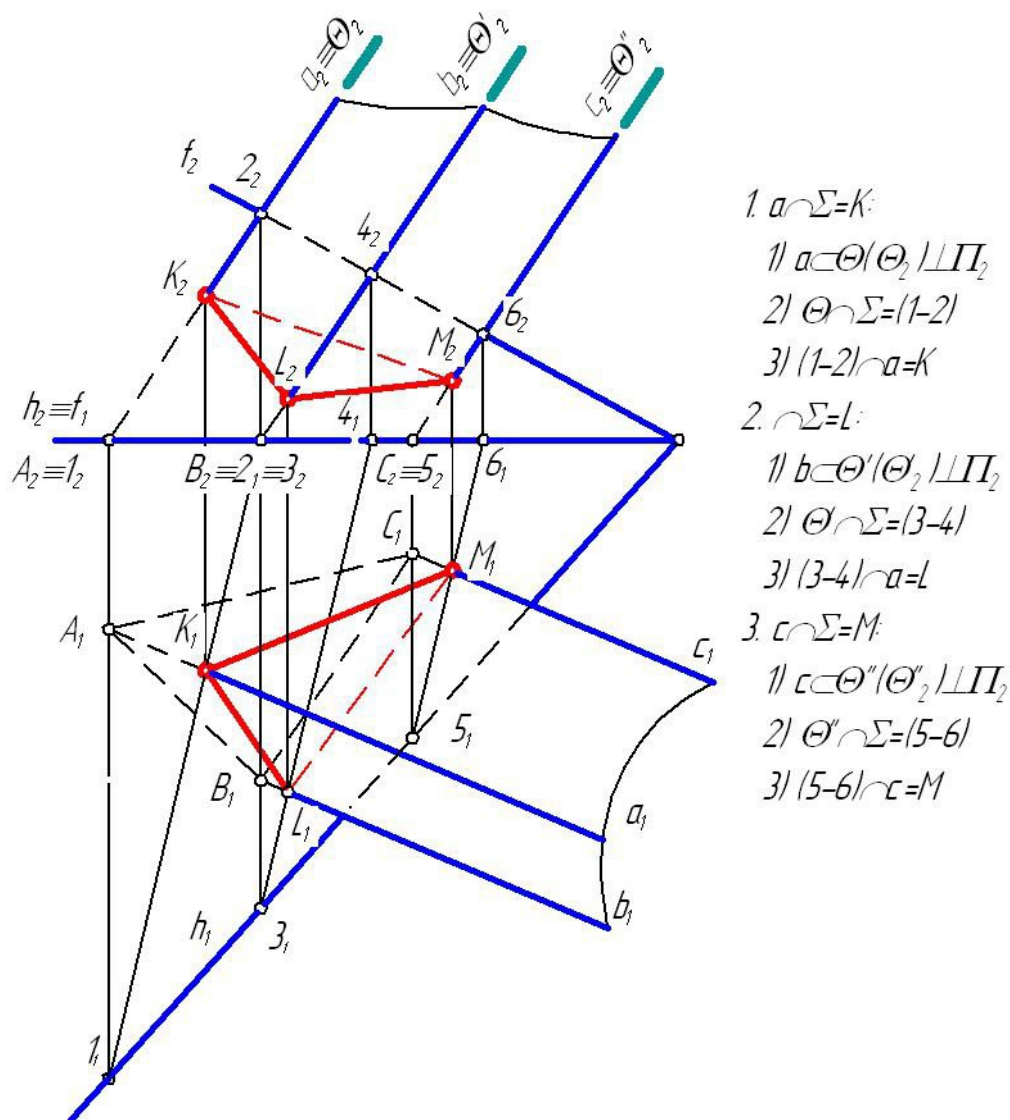
Промежуточные точки сечения находятся с помощью дополнительных плоскостей, перпендикулярных оси вращения и пересекающих тор по параллелям.



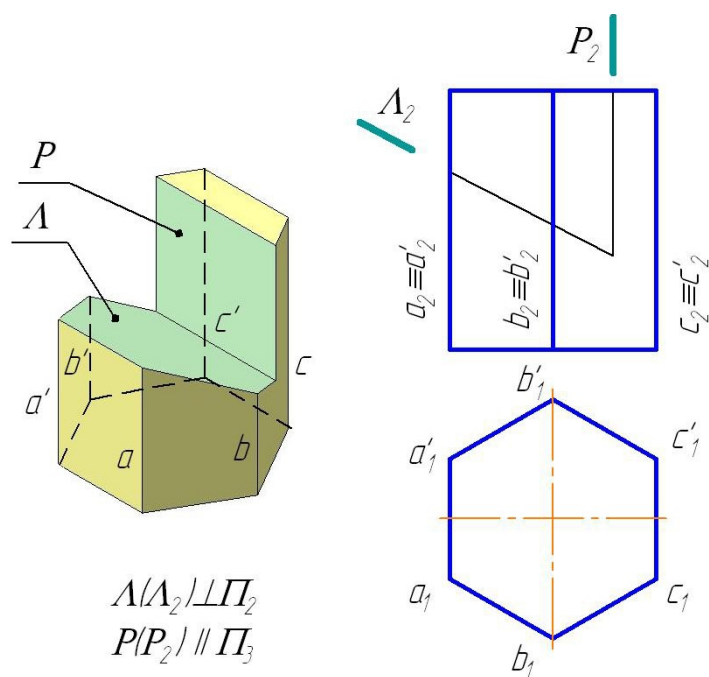
**Пример 6.** Построить линию пересечения наклонной призмы плоскостью  $\Sigma$  ( $h \cap f$ ).



Заданная плоскость  $\Sigma$  пересекает только грани призмы, не задевая основание, линия пересечения – треугольник, вершины которого определяются методом ребер, т.е. определением точек пересечения ребер призмы с плоскостью  $\Sigma$ :

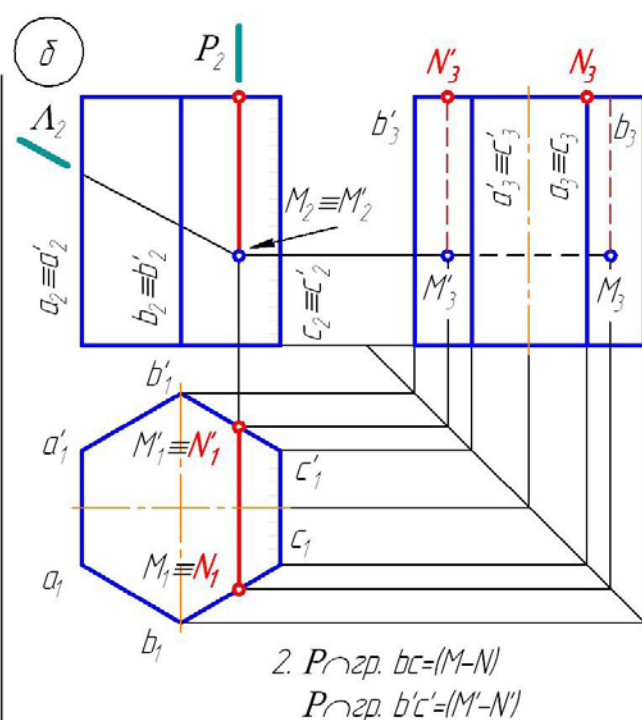
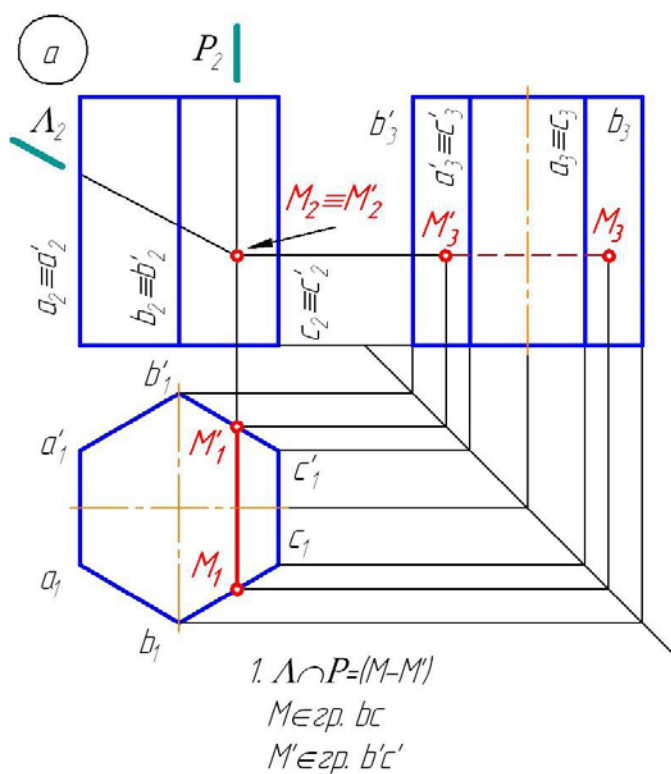


**Пример 7.** Построить горизонтальную и профильную проекции призмы, часть которой отсечена плоскостями частного положения.



На рисунке задано графическое условие, в котором прямая шестигранная призма пересекается двумя плоскостями – фронтально-проецирующей плоскостью  $\Lambda$  и профильной плоскостью  $P$ .

Заданные плоскости  $\Lambda$  и  $P$  перпендикулярны фронтальной плоскости проекций и пересекаются между собой по фронтально-проецирующей прямой ( $M-M'$ ). Точки  $M, M'$  принадлежат граням призмы  $bc$  и  $b'c'$  соответственно, следовательно, проецируются на ее горизонтальный очерк (рис. а). Профильные проекции точек определяются по линиям связи.

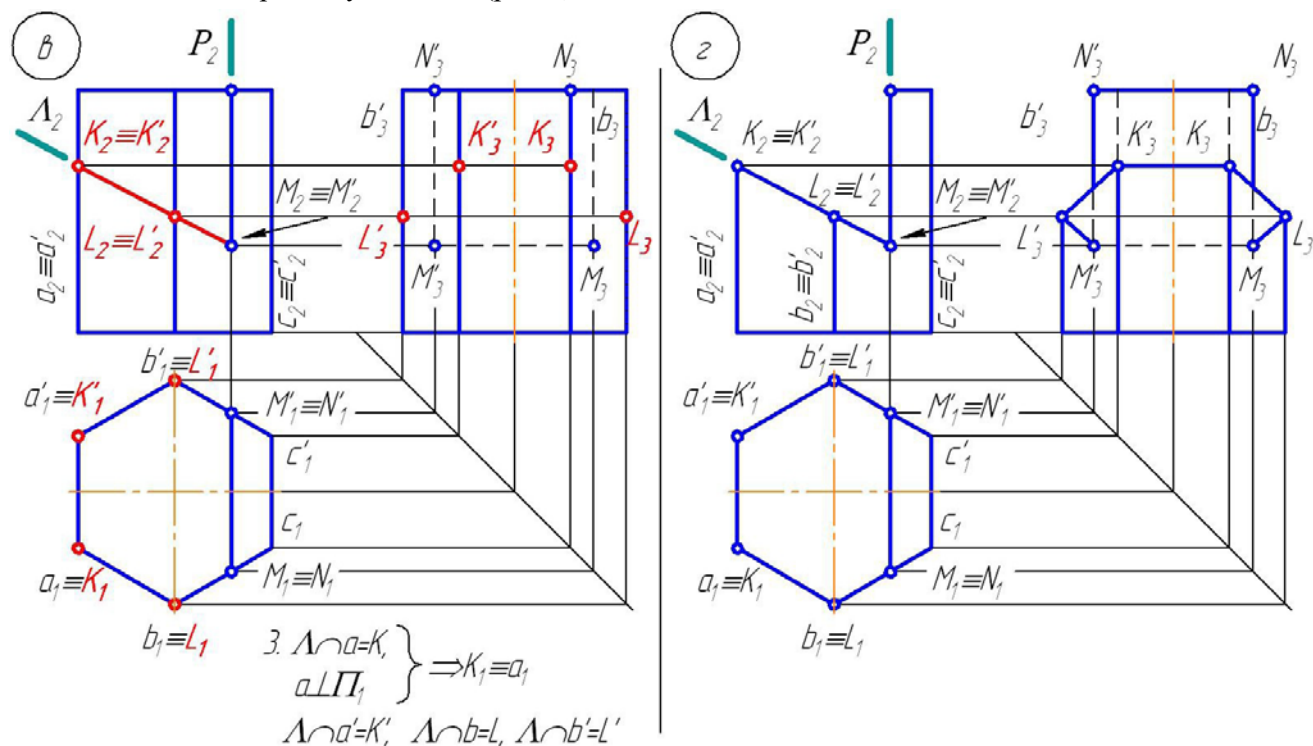


Профильная плоскость  $P$  параллельна грани  $cc'$  и пересекает грани  $bc$  и  $b'c'$  по образующим. В результате пересечения получается прямоугольник  $MNN'M'$  (рис. б).

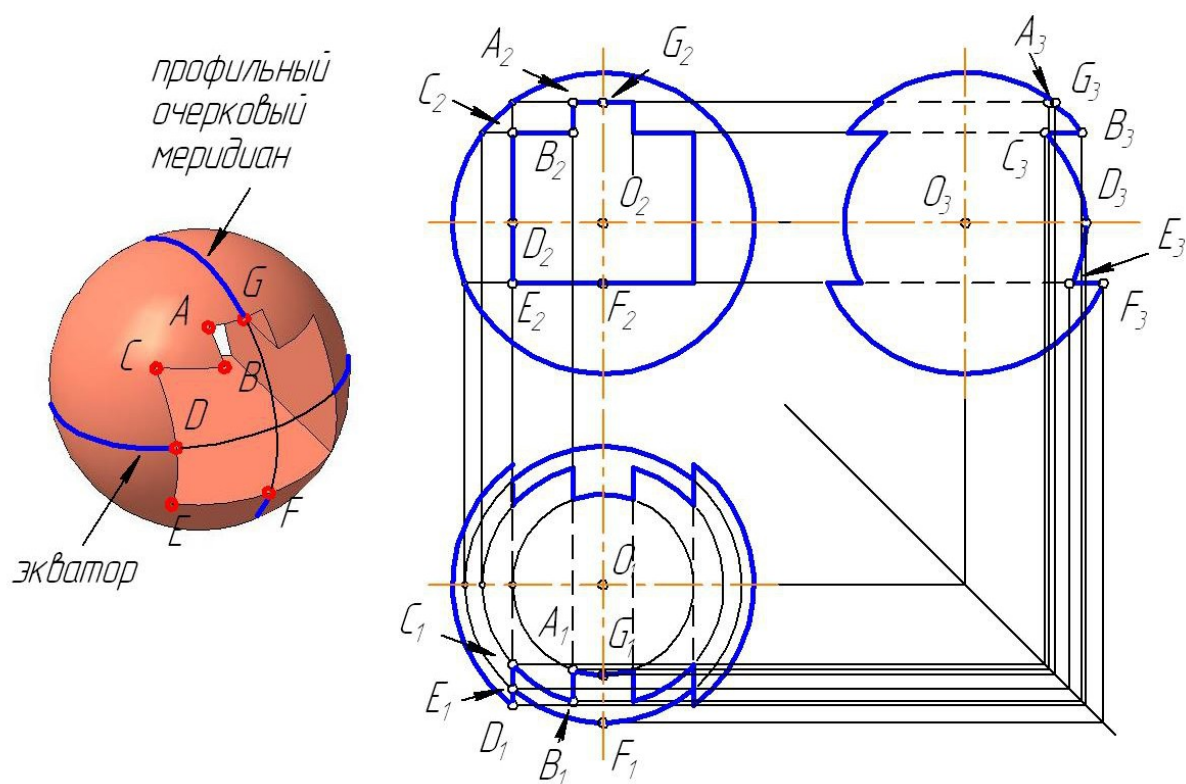
Фронтально-проецирующая плоскость  $\Lambda$  пересекает ребра  $a, a', b, b'$  призмы в точках  $K, K', L, L'$  соответственно. Т.к. ребра призмы перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций, горизонтальные проекции точек пересечения совпадают с вырожденными проекциями ребер (рис. в). Профильные проекции определяются по линиям связи. С учетом построенных ранее точек  $M, M'$  результатом пересечения является шестиугольник.



Далее полученные точки соединяются между собой с учетом видимости. Отсеченные плоскостями  $\Lambda$  и  $P$  части призмы удаляются (рис. 2).



**Пример 8.** В соответствии с фронтальной проекцией сферы с фигурным вырезом построить ее горизонтальную и профильную проекции.



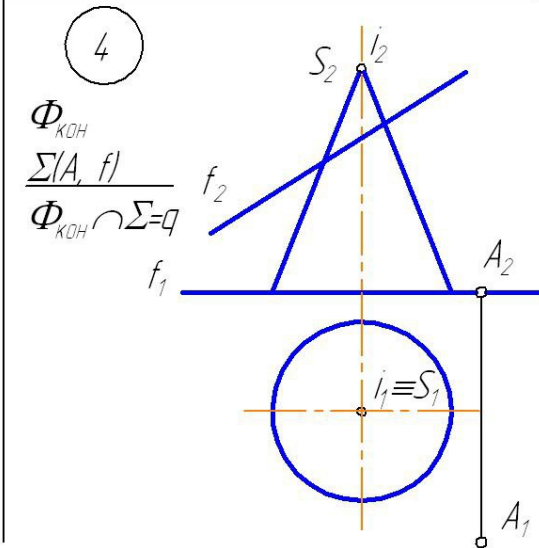
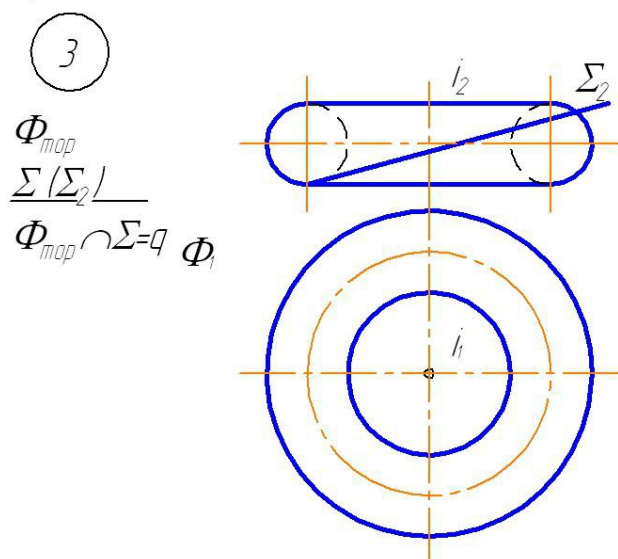
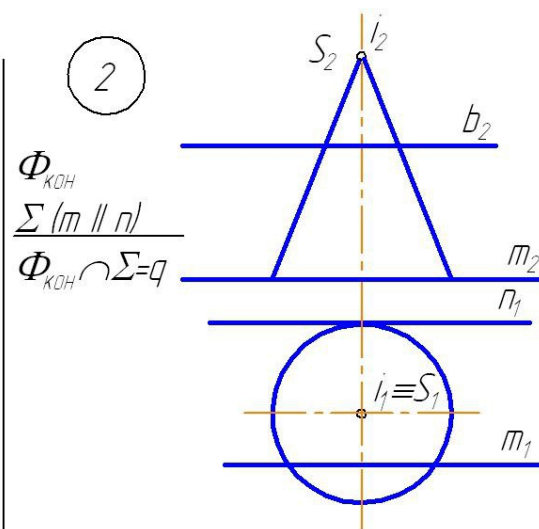
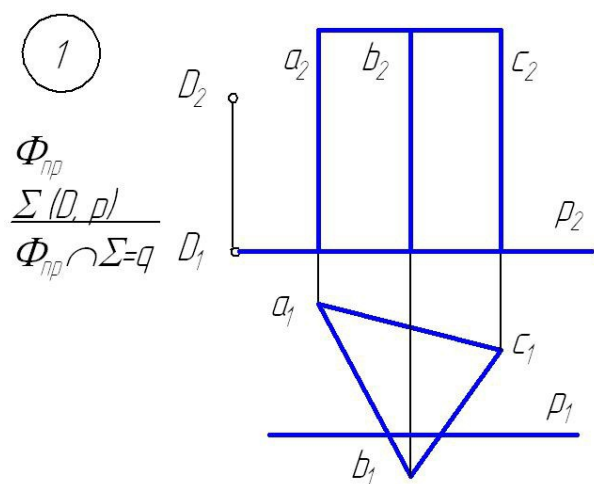
Точки выреза расположены на дугах окружностей, лежащих в плоскостях, параллельных горизонтальной или профильной плоскостям проекций.

### Вопросы для самостоятельного контроля знаний

1. Какие существуют способы построения линии пересечения многогранника плоскостью?
2. Какие бывают формы линии пересечения конуса, цилиндра, сферы, тора плоскостью?
3. Как находятся проекции линии пересечения поверхности с плоскостью частного положения?
4. Принцип построения точки, принадлежащей линии пересечения поверхности с плоскостью общего положения?
5. Как определяется видимость звеньев линии пересечения многогранника с плоскостью?
6. Как определяется видимость линии пересечения плоскости с поверхностью вращения?

### Задачи для самоподготовки

**Задачи 1-4.** Построить линию пересечения поверхности с плоскостью  $\Sigma$ .





## 2.5. Пересечение прямой с поверхностью

### Теоретическая часть

**Частный случай 1.** Пересекаются прямая общего положения  $l$  и проецирующая поверхность.

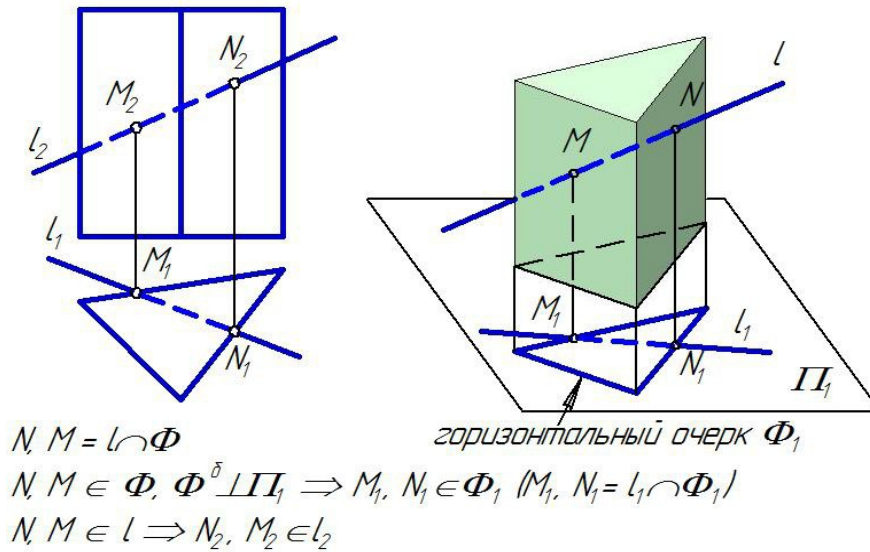


Рис. 2.33

В случае, когда задана проецирующая поверхность (образующие поверхности перпендикулярны одной из плоскостей проекций) одна из проекций искомых точек пересечения определяется сразу, исходя из принадлежности их этой проецирующей поверхности.

В данном примере призма является горизонтально-проецирующей поверхностью, следовательно, горизонтальные проекции точек пересечения лежат на пересечении горизонтальной проекции прямой  $l$  и горизонтального очерка призмы.

Вторая проекция точек определяется исходя из принадлежности их прямой  $l$ .

**Частный случай 2.** Пересекаются проецирующая прямая  $j$  с поверхностью конуса.

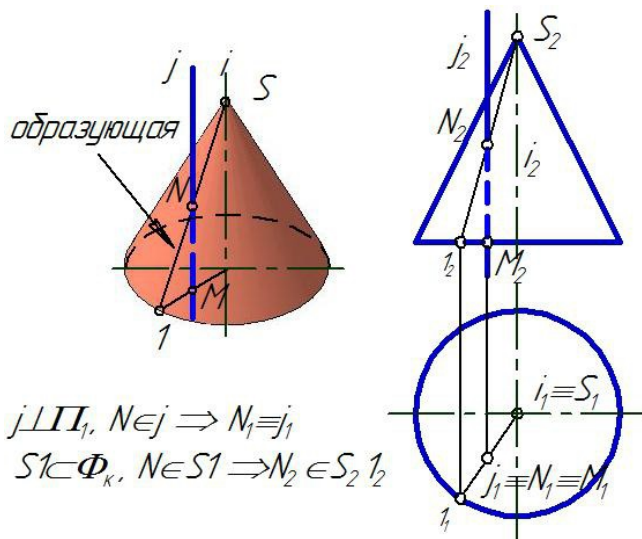


Рис. 2.34

В этом случае одна из проекций искомой точки  $N$ , лежащей на боковой поверхности конуса, также изначально определена на чертеже. Она совпадает с вырожденной проекцией прямой.

Вторая проекция этой точки определяется из условия принадлежности ее образующей поверхности.

Точка  $M$  находится на пересечении прямой с плоскостью основания конуса.

**Общий случай.** Пересекаются непроецирующая поверхности и прямая общего положения.

Ход решения задач на пересечение прямой с поверхностью в общем случае аналогичен алгоритму построения точки пересечения прямой с плоскостью.

Чтобы найти точки пересечения прямой с поверхностью, необходимо:

- 1) Заключить прямую в дополнительную (вспомогательную) плоскость.
- 2) Построить линию пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью.
- 3) Определить точки пересечения полученного сечения с заданной прямой.

В качестве вспомогательной плоскости выбирают плоскость общего или частного положения, дающую наиболее простую линию сечения поверхности (ломаную или окружность).

**Пример 1.** Применение в качестве плоскости-посредника проецирующей плоскости.

На рисунке 2.35 приведен пример построения точки пересечения прямой общего положения  $l$  с трехгранной пирамидой  $SABC$ . Какая бы плоскость в качестве дополнительной не была бы выбрана, она пересечет многогранник по многоугольнику. В данном примере прямая  $l$  заключена во фронтально-проецирующую плоскость  $\Theta$ . Т.к. дополнительная плоскость пересекает только боковую поверхность, не задевая основание пирамиды, сечением является треугольник  $123$ , вершины которого лежат на ее ребрах.

Дополнительная плоскость перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, линия пересечения принадлежит ей, следовательно, на КЧ фронтальная проекция линии пересечения проецируется на след плоскости в отрезок. Горизонтальная проекция линии пересечения находится исходя из принадлежности ее пирамиде, горизонтальные проекции вершин лежат на соответствующих проекциях ребер.

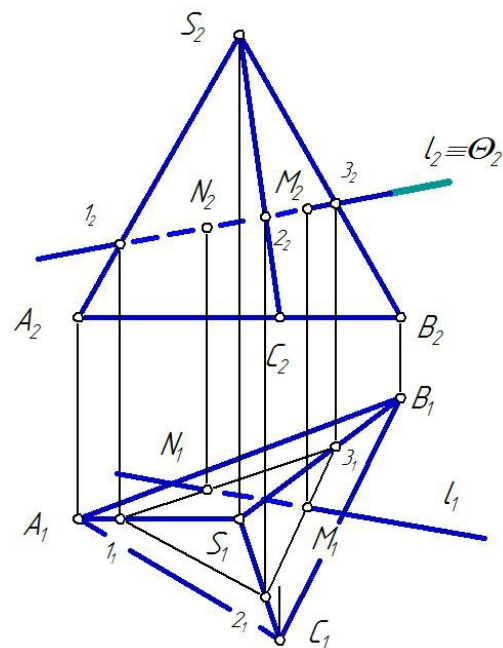


Рис. 2.35

После построения линии пересечения дополнительной плоскости с поверхностью определяют проекции точек пересечения этой линии с заданной прямой (точки  $M$ ,  $N$ ). Они и являются точками пересечения прямой с поверхностью пирамиды.

1.  $l \subset \Theta(\Theta_2) \perp \Pi_2$
2.  $\Theta \cap \Phi_n = 1-2-3$
3.  $1-2-3 \cap l = l \cap \Phi_n = N, M$

Видимость прямой определяется по принадлежности точек пересечения граням пирамиды. Видима та часть прямой, которая исходит из точки, лежащей на видимой грани многогранника. В данном примере относительно горизонтальной плоскости проекций видны грани пирамиды, соответственно видны точки  $N$ ,  $M$ , принадлежащие им, а значит, видны лучи прямой  $l$ , исходящие из этих точек. Относительно фронтальной плоскости проекций не видна грань  $SAB$ , на которой находится точка  $N$ , следовательно, прямая, исходящая из нее тоже не видна.

**Пример 2.** Применение в качестве плоскости-посредника плоскости общего положения.

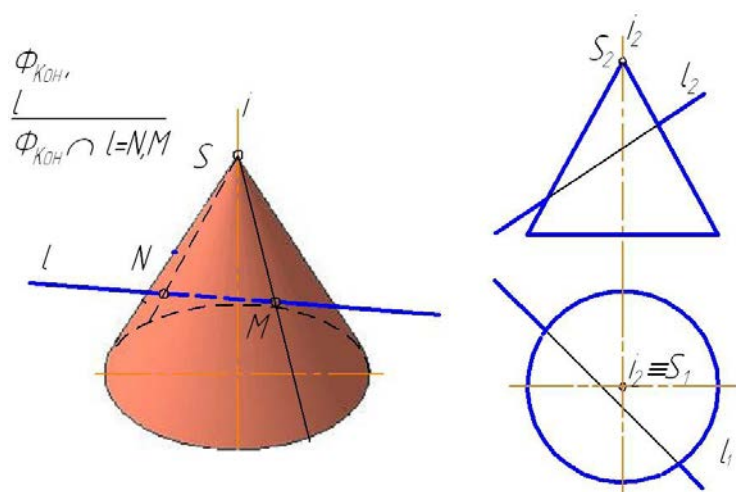


Рис. 2.36

В качестве вспомогательной плоскости иногда приходится выбирать плоскость общего положения. Это связано с тем, что плоскости частного положения дают линию пересечения, проекции которой трудно точно построить на КЧ.

На рисунке 2.36 приведено графическое условие задачи, в которой требуется определить точки пересечения прямой общего положения с конусом. При этом заданная прямая  $l$  и ось вращения  $i$  – скрещивающиеся прямые.

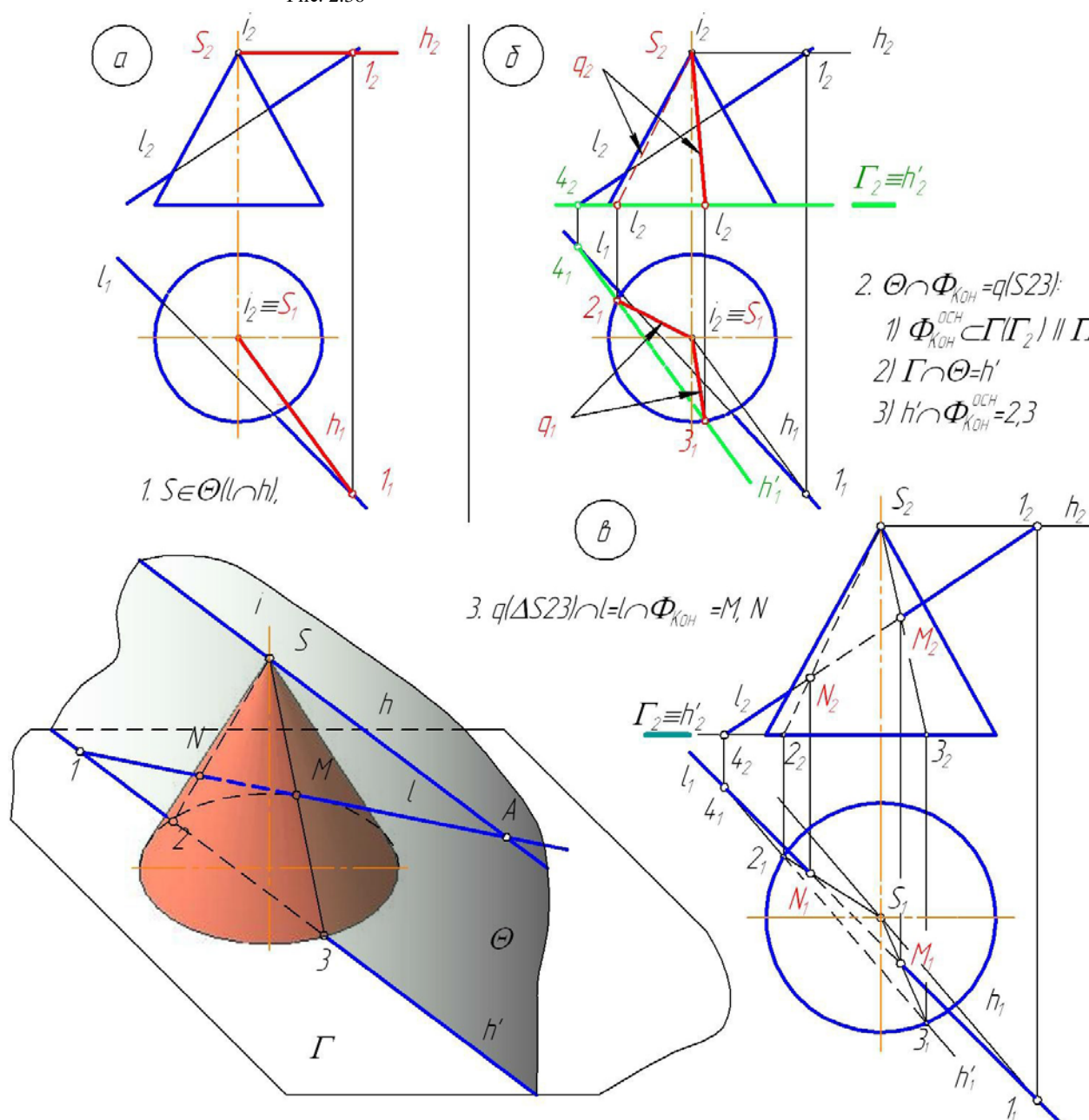


Рис. 2.37

Если такую прямую заключить в дополнительную фронтально-проецирующую плоскость, она пересечет конус по эллипсу, если заключить в горизонтально-проецирующую плоскость – сечением будет гипербола. Поэтому в качестве дополнительной плоскости следует выбрать плоскость общего положения, подобрав ее так, чтобы она пересекла конус по образующим (проходила через вершину и пересекала основание поверхности). Плоскость задается двумя пересекающимися прямыми  $\Theta(l \cap h)$ , одна из которых – заданная прямая  $l$ , другая – произвольная прямая, проходящая через вершину конуса (в данном примере выбрана горизонталь) (рис. 2.37 а).

Чтобы найти точки основания образующих, по которым дополнительная плоскости  $\Theta$  пересекается с поверхностью конуса, его основание заключается во вторую дополнительную плоскость  $\Gamma$  ( $\Gamma_2$ ). Дополнительные плоскости пересекаются между собой по горизонтали  $h'$ . Точки основания образующих (точки 2, 3) находятся в месте линии пересечения дополнительных плоскостей с основанием конуса (рис. 2.37 б).

Далее с учетом видимости строятся проекции линии пересечения  $q$  ( $S23$ ) и определяются точки пересечения ее с заданной прямой  $l$ . Точки  $N$ ,  $M$  и являются точками пересечения прямой с поверхностью.

Видимость прямой определяется по принадлежности точек пересечения той или иной образующей. Видна та часть прямой, которая исходит из точки, принадлежащей видимой образующей. Относительно горизонтальной плоскости поверхности видны все образующие конуса, соответственно видны точки и лучи прямой, исходящие из них. Относительно фронтальной плоскости проекций видны те образующие, точки, основания которых имеют большую координату по оси  $u$ , чем фронтальные очерковые образующие (на чертеже не видна образующая  $S2$ ).

### **Примеры решения задач**

#### **Пример 1.** *Применение в решении задачи методов преобразования КЧ.*

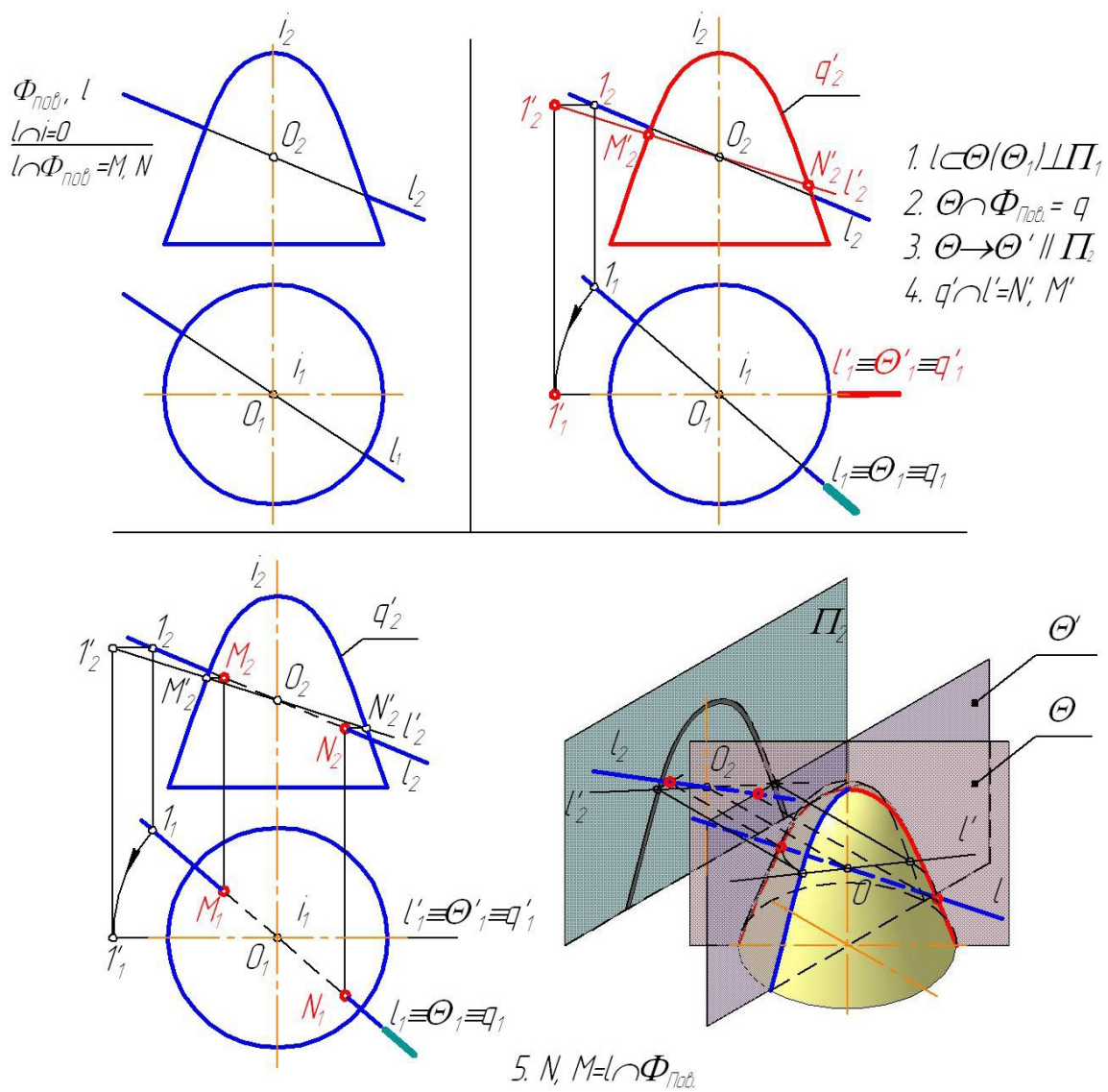
Иногда невозможно подобрать дополнительные плоскость общего или частного положения так, чтобы линия пересечения ее с поверхностью вращения проецировалась на плоскость проекций без искажения и была «удобной» для построения на КЧ. В этом случае возникает необходимость в преобразовании КЧ таким образом, чтобы линия пересечения проецировалась на какую-либо плоскость проекций без искажения.

На рисунке приведен пример построения точки пересечения поверхности вращения, имеющей криволинейную образующую с прямой общего положения  $l$ , при этом заданная прямая пересекает ось вращения поверхности.

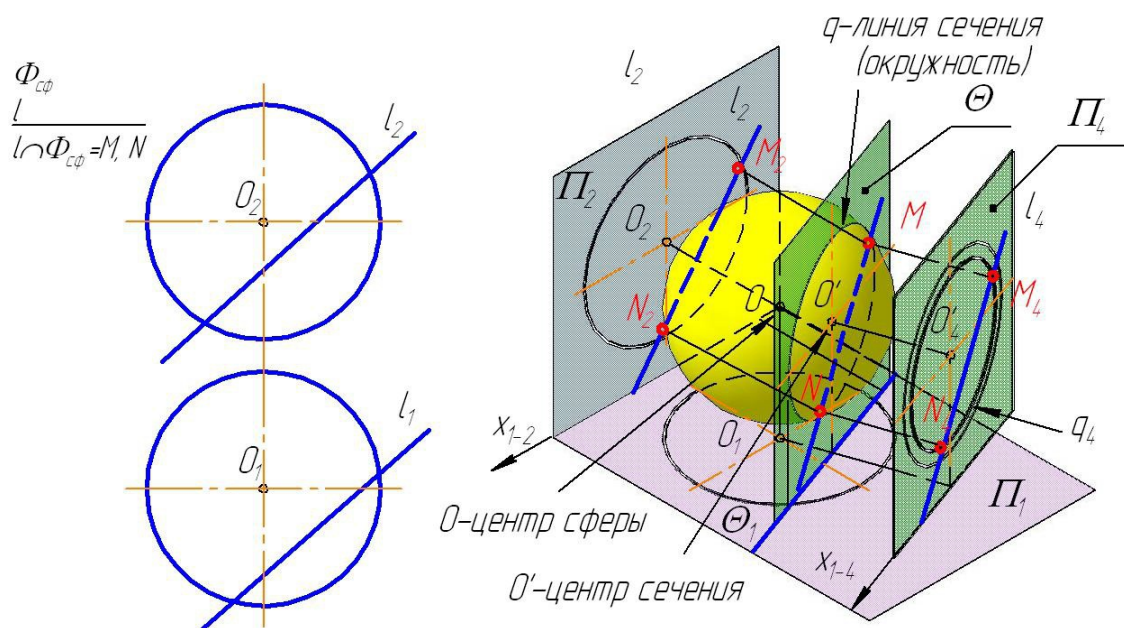
В качестве дополнительной плоскости выбирается проецирующая плоскость, содержащая заданную прямую и ось вращения поверхности. Эта плоскость пересекает поверхность по меридиану  $q$ , проецирующемуся на фронтальную плоскость проекций с искажением. Поэтому дополнительную плоскость, вместе с находящимися в ней прямой  $l$  и линией пересечения  $q$ , поворачивают в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций. При этом проекция линии пересечения ( $q'$ ) совпадет с фронтальным очерком поверхности. Для того, чтобы получить новое положение прямой  $l$  необходимо на ней выбрать произвольную точку (точка 1) и развернуть ее в новое положение плоскости (вторая точка прямой, точка  $O$ , лежит на оси вращения и неподвижна). Траектория движения точки  $l$  – дуга окружности, центр которой лежит на оси вращения поверхности, на горизонтальную плоскость проекций она проецируется без искажения, а на фронтальную – в виде отрезка, параллельного оси  $x$ .

Получив фронтальные проекции линии пересечения и прямой, можно определить проекции точек пересечения прямой с поверхностью в случае, если прямая параллельна фронтальной плоскости проекций (точки  $M'$ ,  $N'$ ). Далее эти точки необходимо развернуть в первоначальное положения прямой  $l$  (траектории вращения точек – дуги окружностей, их фронтальные проекции также параллельны оси  $x$ ).

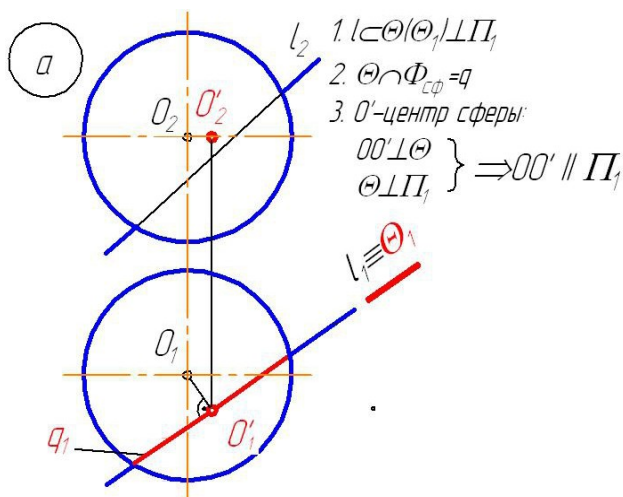




**Пример 4.** Найти точки пересечения прямой  $l$  со сферой.

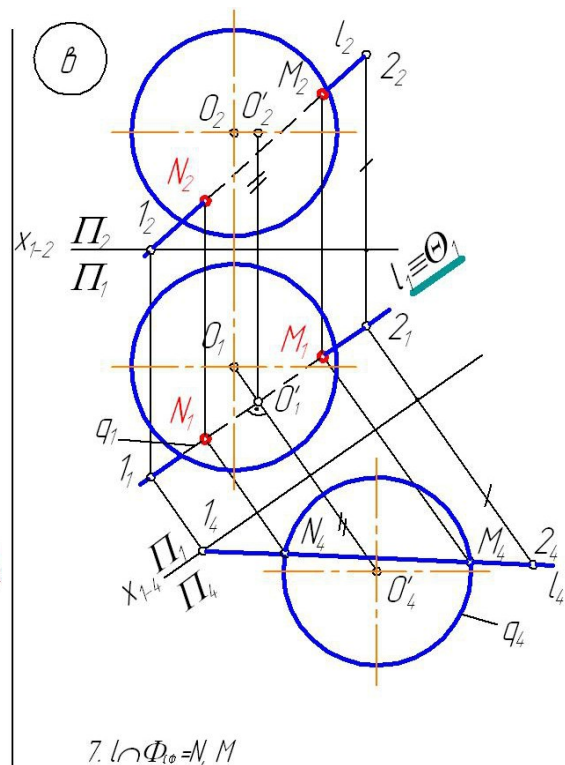
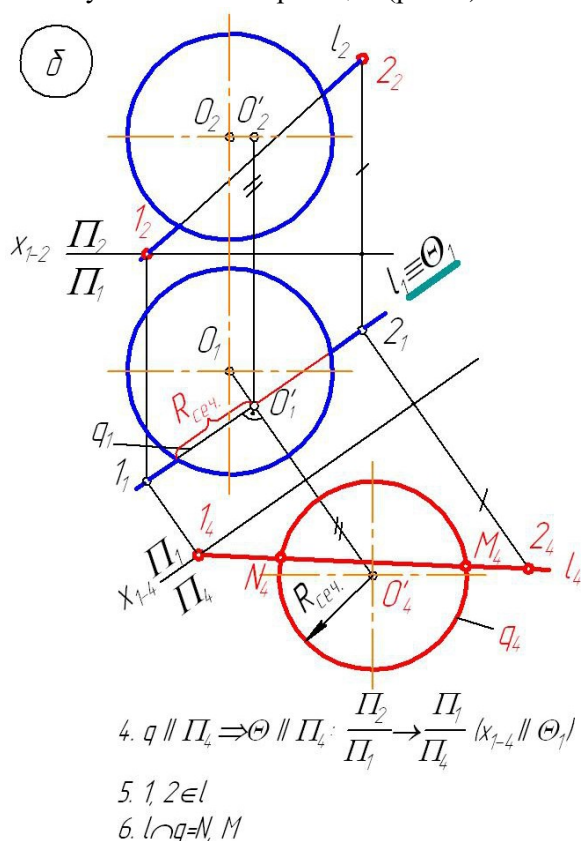






эллипса (на КЧ не строится). Центр сечения (точка  $O'$ ) располагается на перпендикуляре, проведенном из центра сферы (точка  $O$ ) к секущей плоскости.

Необходимо преобразовать систему ортогональных плоскостей проекций так, чтобы на новую плоскость проекций окружность-сечение спроецировалась без искажения. При этом заменяется фронтальная плоскость на новую плоскость проекций, параллельную дополнительной плоскости  $\Theta$ .<sup>8</sup> Заданная прямая  $l$  с помощью произвольных точек, принадлежащих ей, (точки  $1, 2$ ) также проецируется на новую плоскость проекций (рис. б).



Далее находятся точки пересечения ее с линией пересечения  $q$ , являющиеся искомыми (рис. б, в).

Видимость прямой относительно сферы определяется также, как в предыдущей задаче: виден тот луч, который исходит из видимой точки поверхности. Относительно горизонтальной плоскости проекций видна та точка, которая находится выше экватора сферы (имеет большую координату по оси  $z$ ). Относительно фронтальной плоскости проекций видна та точка, которая находится ближе фронтального очеркового меридиана (имеет большую координату по оси  $y$ ).<sup>9</sup>

<sup>8</sup> См.: Метод замены плоскостей проекций. Четвертая основная задача начертательной геометрии.

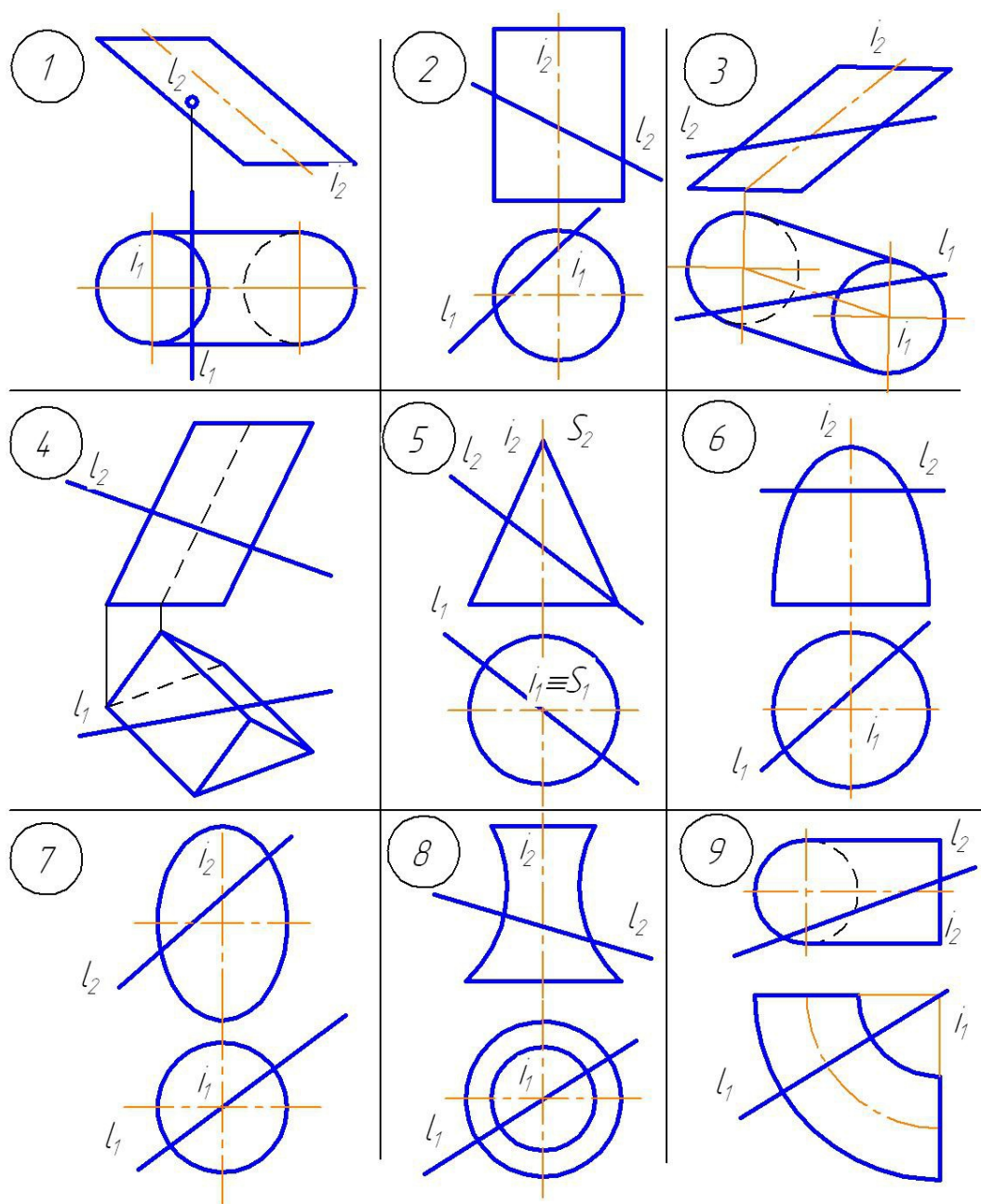
<sup>9</sup> См. Принадлежность точки поверхности.

### Вопросы для самостоятельного контроля знаний

1. Каков алгоритм нахождения точек пересечения прямой с поверхностью в общем случае?
2. От чего зависит выбор той или иной дополнительной плоскости, используемой для определения точек пересечения прямой с поверхностью?
3. Какие дополнительные плоскости рационально использовать при нахождении точек гранной поверхности с прямой?
4. Какие плоскости необходимо использовать при пересечении конуса в случае, если прямая пересекает ось вращения, и в случае, если они с осью вращения являются скрещивающимися прямыми?
5. Как следует задавать дополнительные плоскости, проходящие через заданную прямую чтобы с конусом и цилиндром они пересеклись по образующим.

### Задачи для самоподготовки

**Задачи 1-9.** Построить точки пересечения прямой  $l$  с поверхностью.



## 2.6. Пересечение многогранников

### Теоретическая часть

Многогранники между собой пересекаются по замкнутым ломаным линиям. Если один многогранник частично пересекает второй, линия пересечения – пространственная ломаная линия (рис. 3.65 а). Если многогранник полностью пересекает второй многогранник – линия пересечения распадается на две плоские ломаные линии (рис. 2.29 б).

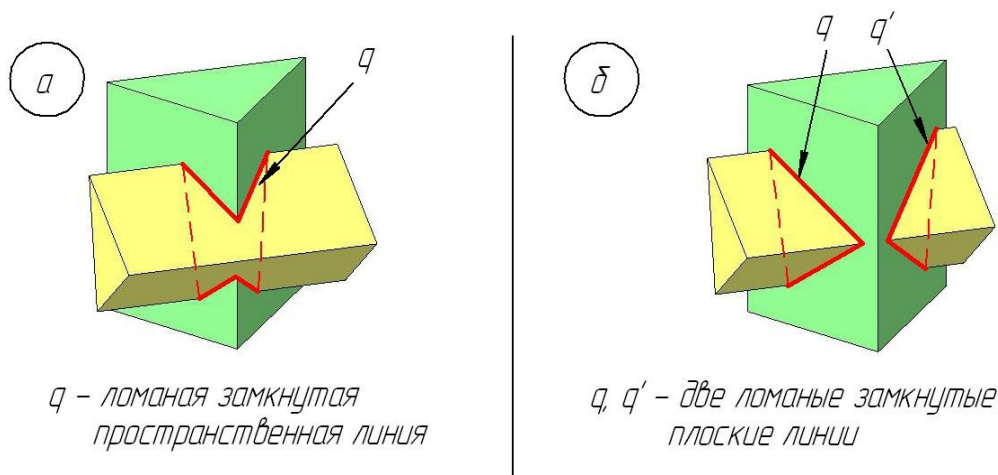


Рис.2.38

Линия пересечения многогранников находится «способом ребер» или «способом граней». В первом случае находятся точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого, во втором – определяются отрезки прямых, по которым грани одного многогранника пересекаются с гранями другого. На практике чаще используется первый способ.

**Частный случай.** Пересекаются два многогранника, у одного из которых боковая поверхность проецирующая.

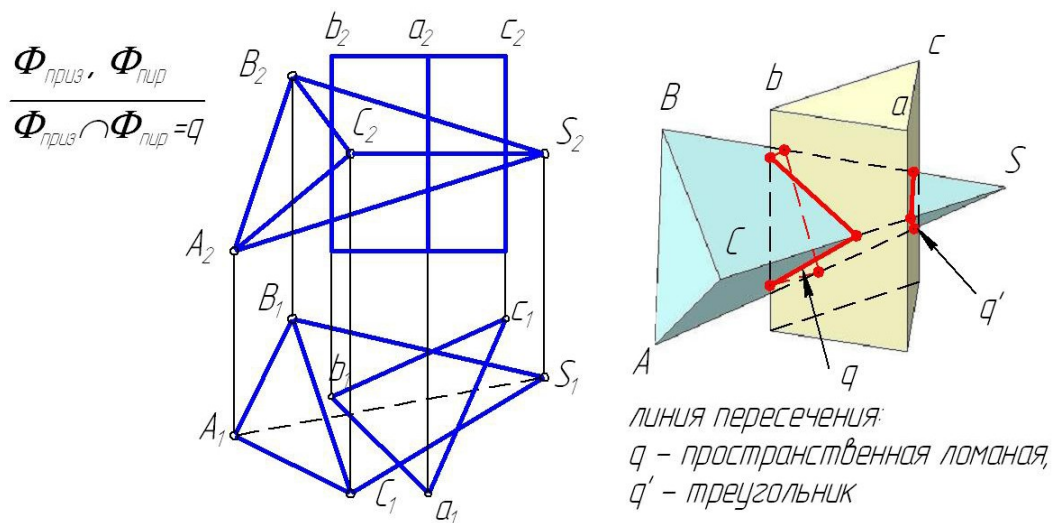


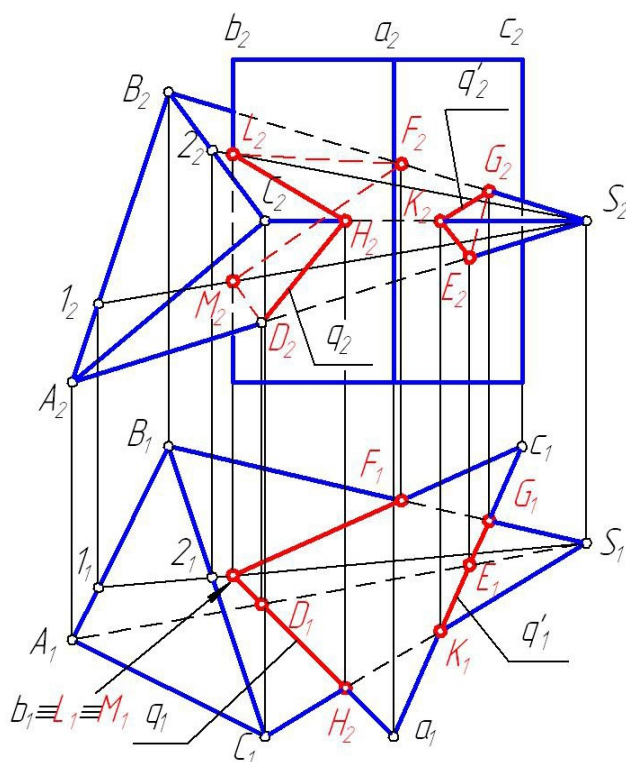
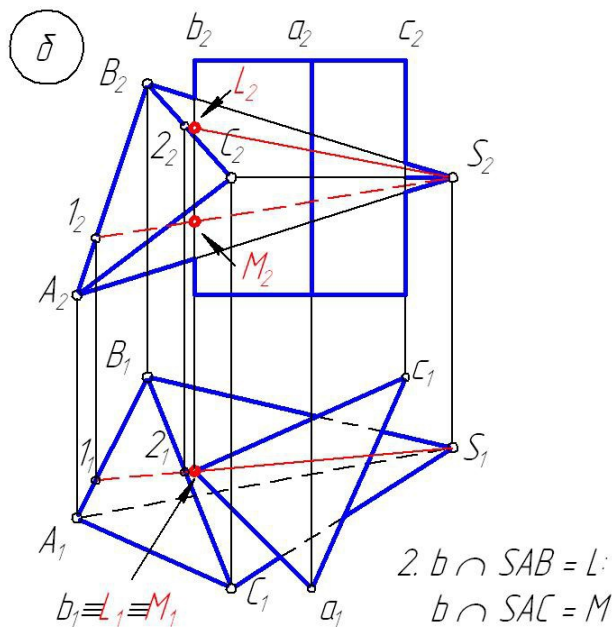
Рис. 2.39

На рисунке 2.39 приведено графическое условие задачи, в которой необходимо найти линию пересечения призмы и пирамиды.

В результате пересечения заданных многогранников получается ломаная пространственная линия. Она соединяет соответствующие точки пересечения ребер одного многогранника с гранями другого. Линия пересечения распадается на две отдельные замкнутые линии, одна из которых плоская.

Искомые точки сечения можно получить, решая задачу на пересечение прямой (ребра) с плос-

1.  $SA \cap ab = D, E$



На рисунке 2.40 *a* определены точки пересечения ребра  $SA$  (прямой общего положения) с гранями  $ab$  и  $bc$  (горизонтально-проецирующие плоскости). Точки пересечения ребер  $SB$ ,  $SC$  пирамиды с гранями призмы находятся аналогично. Далее необходимо определить точки пересечения ребер приз-

51



мы с гранями пирамиды. Графическое условие задачи задано таким образом, что с пирамидой пересекается только ребро  $b$  (точки  $L, M$  на рис. 2.40 б).

Полученные точки линии пересечения необходимо соединить с учетом видимости. Видимыми считаются те звенья линии пересечения, которые лежат на видимых гранях двух многогранников.

Для определения видимости линии сечения строится диаграмма, на которой схематично в произвольных размерах изображаются грани заданных многогранников. Знаками “+” и “-” отмечается видимость граней многогранников. На соответствующих гранях и ребрах наносятся точки сечения, и соединяют их с учетом видимости (рис. 2.40).

**Общий случай.** Пересекаются многогранники, имеющие непроецирующие грани.

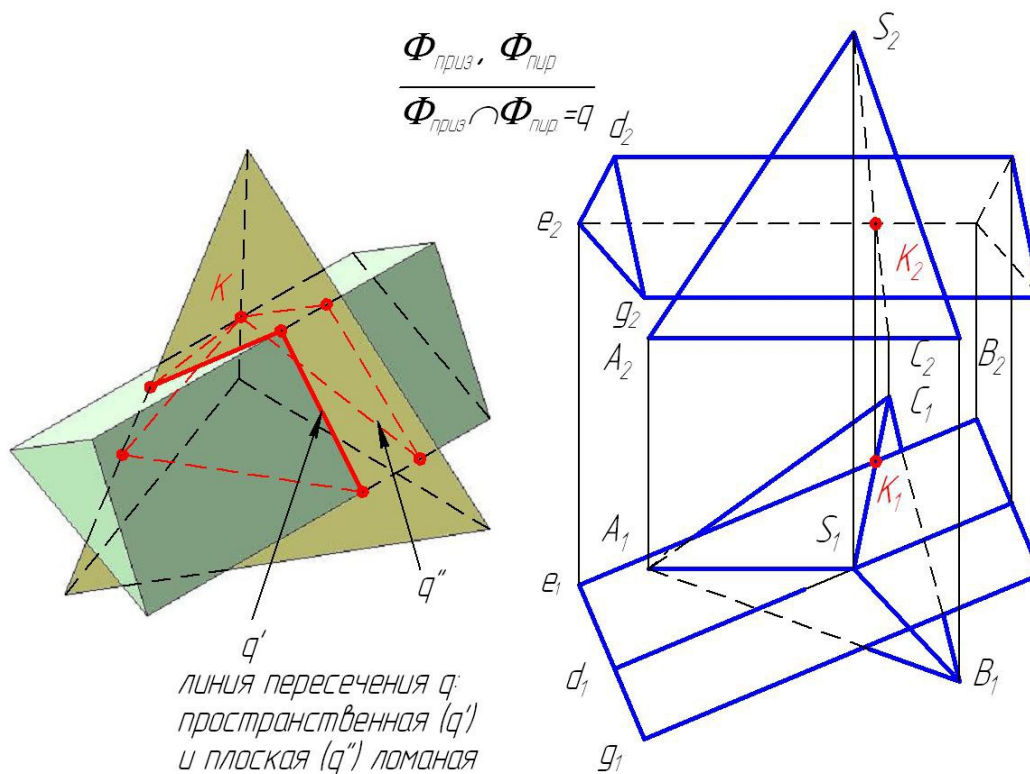


Рис. 2.41

Для упрощения решения графическое условие задачи задано таким образом, что изначально известна одна из точек линии пересечения (ребра  $e$  и  $SC$  пересекаются в точке  $K$ , рис. 2.41).

Остальные точки линии пересечения находятся «методом ребер»:

1. Ребро призмы  $d$  заключается в дополнительную плоскость  $\Gamma$ , перпендикулярную фронтальной плоскости проекций (рис. 2.42 а).
2. Дополнительная плоскость пересекает поверхность пирамиды по линии  $q$  (треугольник 123), вершины которого находятся на ее ребрах.
3. Точки  $L, M$  на пересечении ребра со звеньями линией пересечения.

Из рисунка 2.34 видно, что ребро  $d$  пересекает грани  $SAB$  и  $SBC$ .

Точки пересечения ребра призмы  $g$  с гранями пирамиды находятся аналогично (точки  $T$  и  $U$  на рис. 3.71).

Точки пересечения ребра  $SA$  пирамиды с гранями призмы (точки  $N, P$ ) находятся с помощью плоскости  $\Phi(\Phi_1)$  (рис. 2.42 б), пересекающей призму по треугольнику 456.

Видимость линии пересечения определяется с помощью диаграммы, принцип построения которой описан в предыдущем примере.



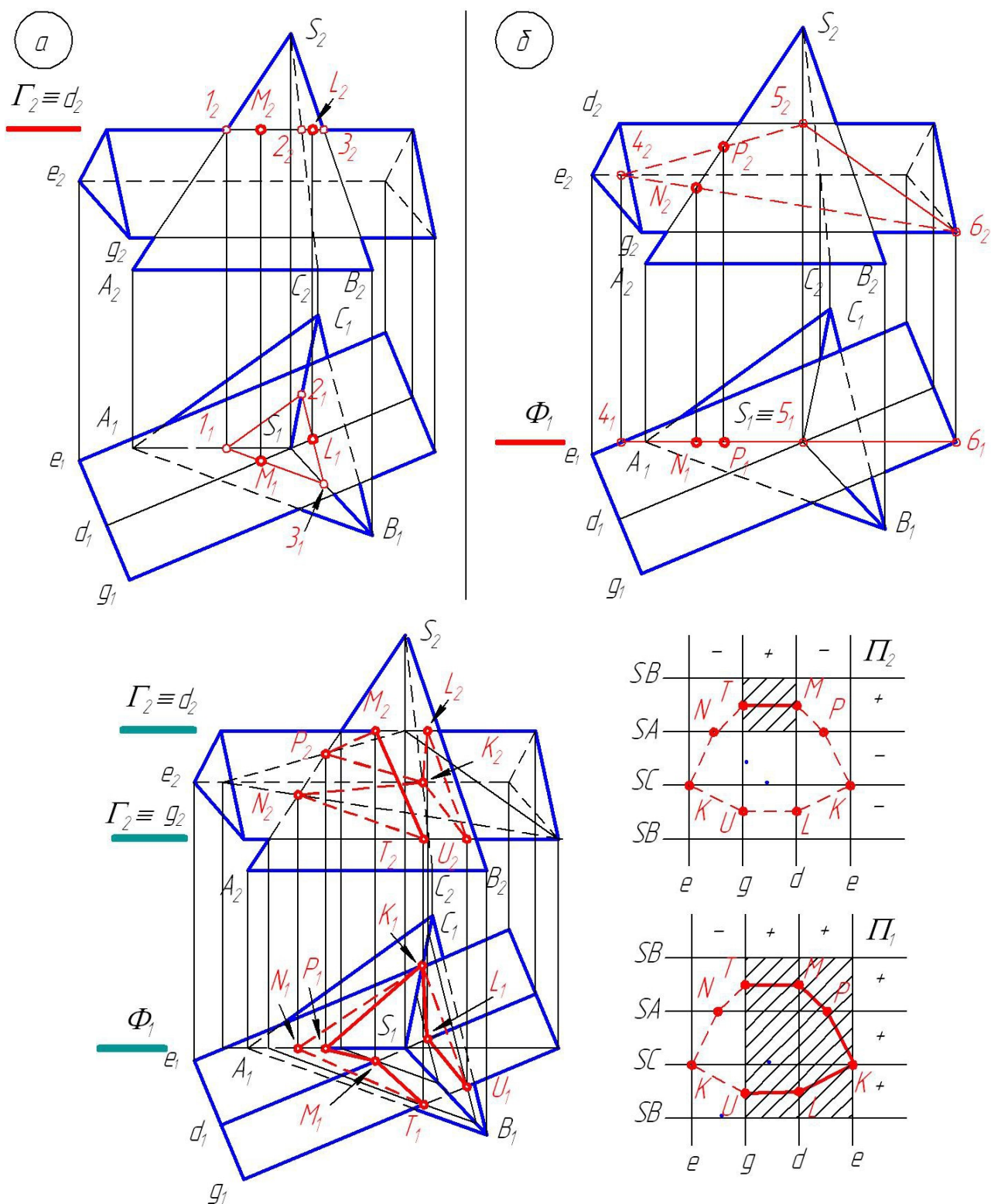


Рис. 2.42

Рассмотренную выше задачу можно решить методом замены плоскостей проекций, выбрав преобразовав КЧ так, чтобы грани призмы были перпендикулярны новой плоскости проекций (рис. 2.43).

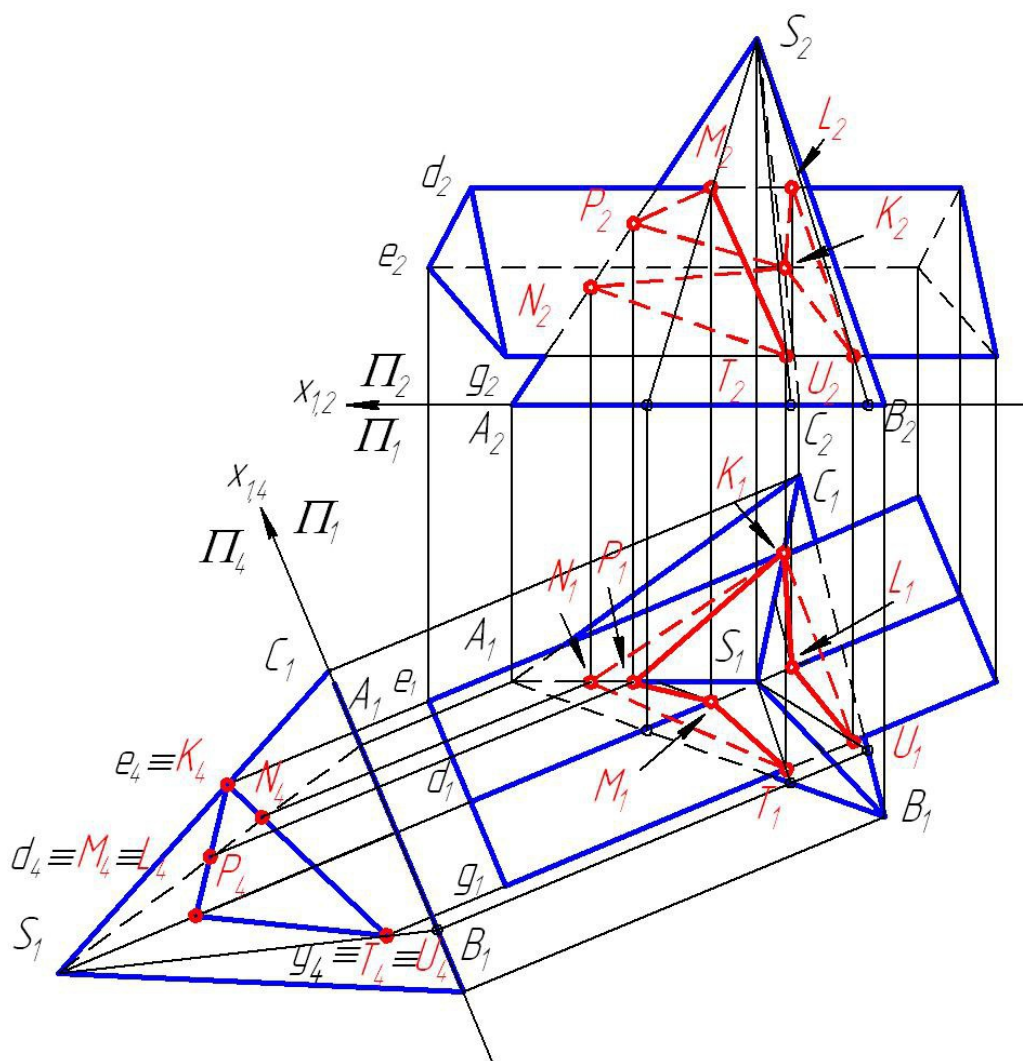


Рис. 2.43

## 2.7. Пересечение поверхностей вращения.

### Теоретическая часть

Поверхности вращения могут пересекаться по плоской или пространственной кривой. Также как у многогранников, линия пересечения может состоять из одного замкнутого контура, если одна поверхность вращения частично пересекает вторую поверхность, или распадаться на несколько линий, если одна поверхность полностью пронизывает другую.

Многогранники с поверхностями вращения пересекаются по плоским кривым.

В некоторых частных случаях линия пересечения поверхностей вращения распадается на две плоские кривые второго порядка. Условия, при которых это происходит, определены в следующих теоремах. Зная их, можно быстрее и точнее построить линию пересечения поверхностей.

**Теорема:** Если две квадрики имеют касание в двух точках, то линия их пересечения распадается на две коники, плоскости которых проходят через отрезок прямой, соединяющей эти точки.

Поверхности прямого кругового цилиндра и эллиптического цилиндра с круговым основанием (рис. 2.44) имеют две общие точки касания ( $A$ ,  $B$ ). Следовательно, они пересекаются по двум коникам – окружности ( $q$ ) и эллипсу ( $q'$ ), плоскости которых пересекаются по прямой  $AB$ .

**Теорема Монжа:** Если две поверхности второго порядка (квадрики) описаны вокруг третьей квадрики, то они пересекаются по двум плоским кривым второго порядка (коникам).

В соответствии с этой теоремой, линии пересечения поверхностей, описанных около сферы, будут плоскими кривыми – эллипсами (рис. 2.45).

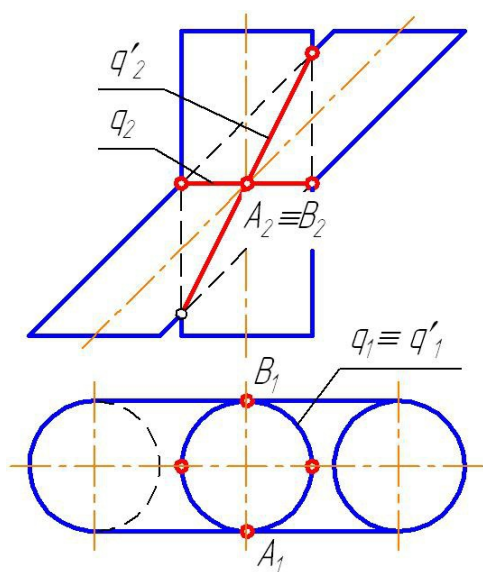


Рис. 2.44

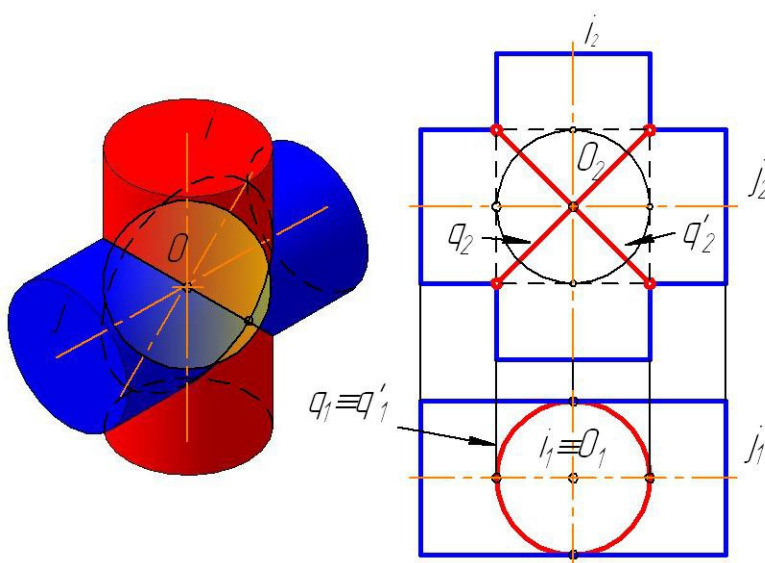


Рис. 2.45

При построении линии пересечения поверхностей следует в первую очередь определить характерные точки: «крайние точки» - высшие и низшие, правые и левые, ближайшие и наиболее удаленные; точки, лежащие на очерковых образующих и параллелях поверхностей; точки границы видимости линии сечения и очерков поверхностей по отношению к плоскостям проекций.

**Частные случаи.** Пересекаются две поверхности, одна из которых имеет прямолинейные образующие, перпендикулярные плоскости проекций (проецирующая поверхность).

Если одна из пересекающихся проекций проецирующая (образующие перпендикулярны одной из плоскости проекций), известна одна из проекций линии пересечения – она совпадает с очерком поверхности. Тогда недостающие проекции линии пересечения находятся исходя из принадлежности ее точек второй поверхности.

**Пример 1.** Пересекаются конус и цилиндр, ось вращения которого перпендикулярна профильной плоскости проекций.

Из графического условия задачи (рис. 2.46) видно, что ось вращения цилиндра перпендикулярна профильной плоскости проекций, следовательно, линия пересечения поверхностей (кривая 4-го порядка) проецируется на профильный очерк цилиндра. Тогда горизонтальные и фронтальные проекции точек линии пересечения определяются исходя из принадлежности их образующим (или параллелям) конуса.

Высшая и низшая точки линии пересечения (точки  $A, B$ ) находятся на верхней и нижней образующих цилиндра в месте пересечения их с левой очерковой образующей конуса.

Границу видимости относительно горизонтальной плоскости проекций в данной задаче определяет поверхность цилиндра (рис. 2.46 б). Точками перехода являются точки  $C, C'$ , лежащие на его горизонтальных очерковых образующих (ближайшая и наиболее удаленная образующая). Их горизонтальная и фронтальная проекции определяются с помощью параллели конуса.

Промежуточные точки линии пересечения строятся по принадлежности их образующим (точка  $D$  принадлежит образующей  $SI$ ) и параллелям (точки  $E, E'$ ) конуса (рис. 2.46 в).

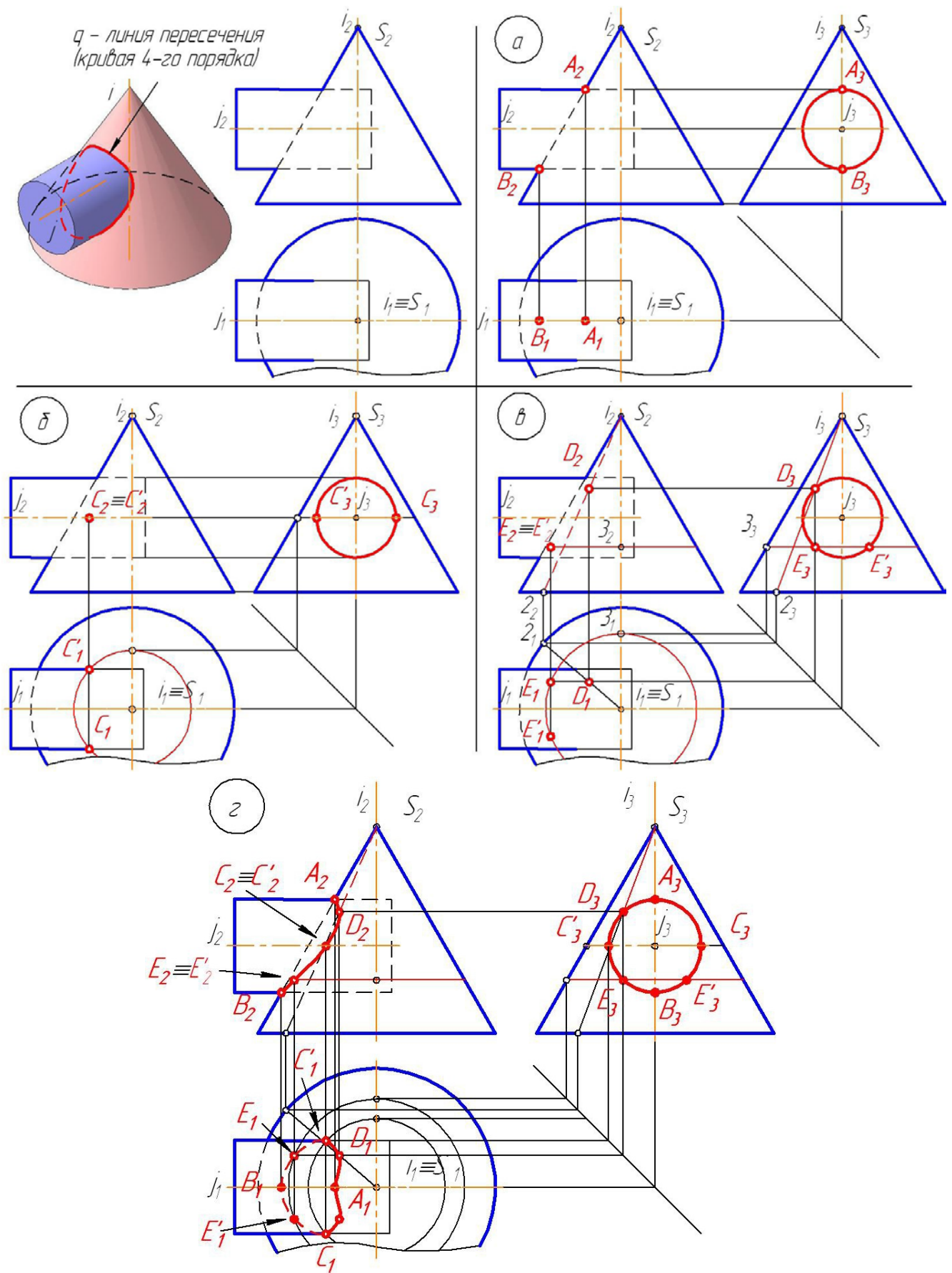


Рис. 2.46



### Пример 2. Пересекаются сфера и прямая призма.

При пересечении многогранника с поверхностью вращения задача сводится к нахождению ряда плоских кривых, которые являются линиями пересечения отдельных граней многогранника с кривой поверхностью.

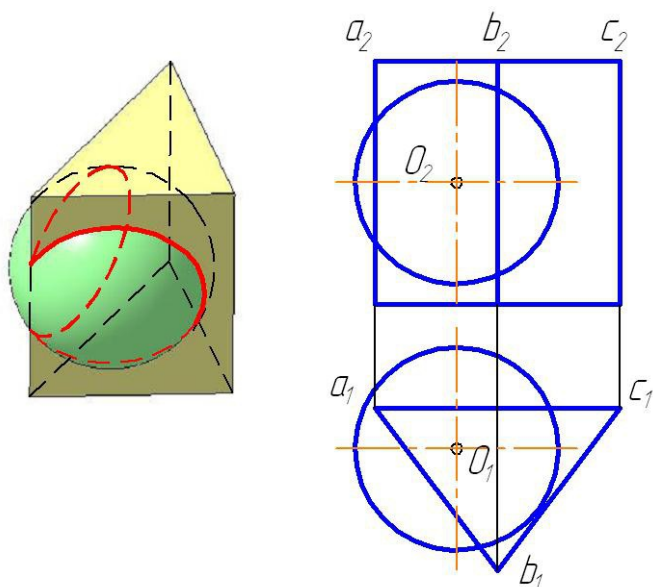


Рис. 2.44

В данной задаче линией пересечения сферы с призмой будет линия, распадающаяся на две дуги окружности. Центры этих дуг лежат на перпендикуляре, проведенном из центра сферы к граням призмы. Т.к. призма проецирующая относительно горизонтальной плоскости проекций, линия пересечения будет проецироваться в виде отрезков на ее горизонтальный очерк. Тогда фронтальные проекции точек линии пересечения определяются исходя из принадлежности их сфере.

### Общий случай.

Построение линии пересечения поверхностей вращения в общем случае ведется с помощью дополнительных секущих поверхностей, в качестве которых могут быть использованы плоскости (рис. 3.73) или сферы.

Секущие поверхности выбираются таким образом, чтобы с заданными поверхностями они пересекались по линиям, легко определяемым на КЧ (образующим или параллелям).

Чтобы построить линию пересечения поверхностей на КЧ, необходимо:

1. Ввести ряд вспомогательных плоскостей или сфер, пересекающих обе заданные поверхности.
2. Построить линию пересечения каждой заданной поверхности со вспомогательной.
3. В месте пересечения построенных таким образом линий (на рис. параллели  $n$ ,  $p$ ) определить точки искомой линии взаимного пересечения.
4. Соединить полученные точки между собой с учетом видимости линии пересечения.

Способ, при котором линия пересечения определяется с помощью дополнительных плоскостей, называется **способом секущих плоскостей**, а нахождение линии сечения с помощью дополнительных сфер – **способом секущих сфер**.

Обычно в качестве секущих плоскостей используются плоскости уровня, т.к. линии пересечения их с заданными поверхностями проецируются на плоскость проекций без искажения. Также в некоторых случаях используются и проецирующие плоскости.

В задачах на пересечение наклонных цилиндров и конусов, а также этими поверхностями многогранников, в качестве плоскостей-посредников используются плоскости общего положения.<sup>11</sup>

<sup>11</sup> В данном пособии не рассматриваются.



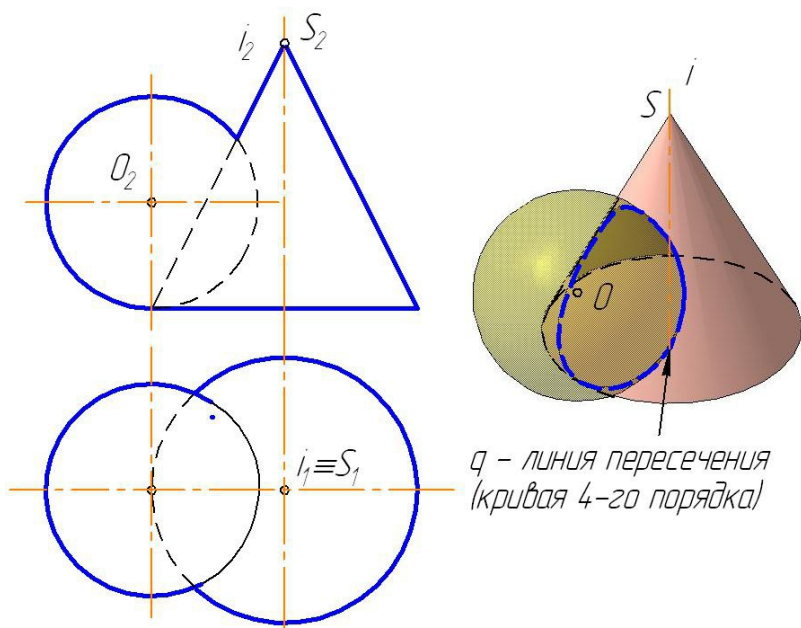


Рис. 2.45

### Построение линии пересечения поверхностей способом секущих плоскостей

Этот способ применяют тогда, когда обе заданные поверхности можно расечь дополнительными плоскостями по окружностям-параллелям или прямым-образующим. Его также используют при построении линии пересечения поверхности вращения с многогранником.

#### Пример 3. Построить линию пересечения конуса и сферы (рис. 3.73).

Конус и сфера имеют общую плоскость симметрии  $\Phi(\Phi_1)$ , параллельную фронтальной плоскости проекций, с помощью которой находят высшую и низшую точки линии сечения (точки  $A$  и  $B$ ). Эта плоскость пересекает конус по очерковым образующим  $l$ , а сферу – по главному меридиану  $m$  (рис. 2.46 а).

Видимость линии пересечения относительно горизонтальной плоскости обуславливает сфера и точками границы видимости являются точки  $C, C'$ , находящиеся на ее экваторе  $p$ . Эти точки находят с помощью плоскости  $\Gamma$ , пересекающей сферу по экватору, а конус по параллели  $n$  (рис. б).

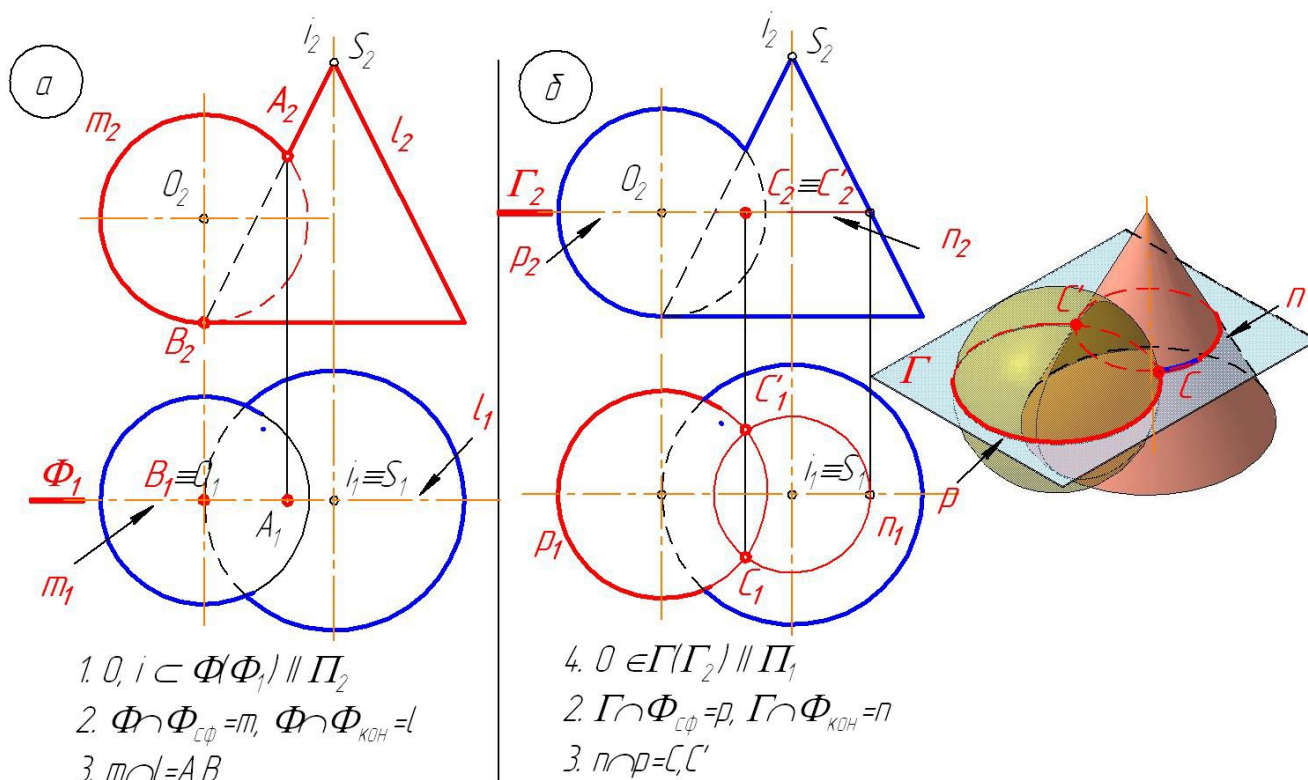


Рис. 2.46

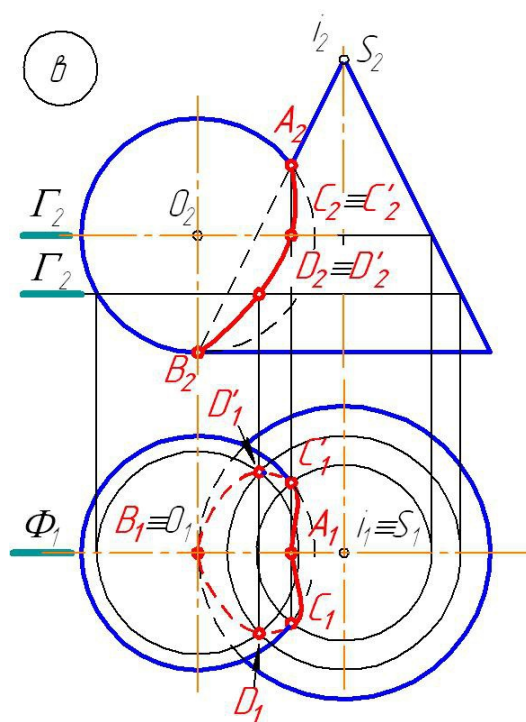


Рис. 2.47

### Построение линии пересечения поверхностей способом секущих сфер

Применение сфер в качестве поверхностей-посредников основано на теореме о двух соосных поверхностях вращения.

**Теорема:** Две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям-параллелям, число которых равно числу точек пересечения главных полумеридианов поверхностей (рис. 2.48).

Соосными называются поверхности, имеющие общую ось вращения.

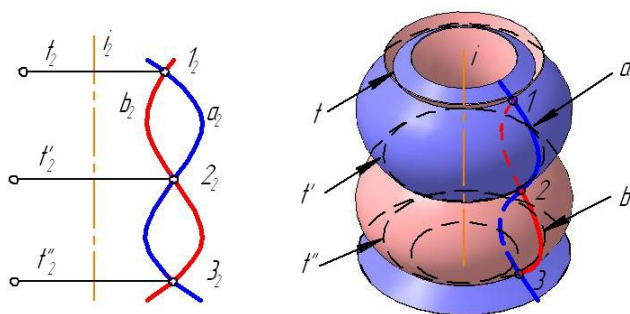


Рис. 2.48

Так как плоскость сечения перпендикулярна оси вращения  $i$ , линия сечения (окружность) проецируется:

- в окружность на плоскость, перпендикулярную оси  $i$ ;
- в отрезок прямой – на плоскость, параллельную оси  $i$ ;
- в эллипс – на любую другую плоскость.

Эти особенности соосных поверхностей вращения позволяют использовать их, в частности сферу, в качестве посредников при построении линии пересечения поверхностей вращения. Любая поверхность вращения, ось которой проходит через центр сферы, соосна с ней и, следовательно, пересекает ее по окружности.

**Следствие:** Сфера, центр которой лежит на оси поверхности вращения, пересекается с последней по окружностям (рис. 2.49).

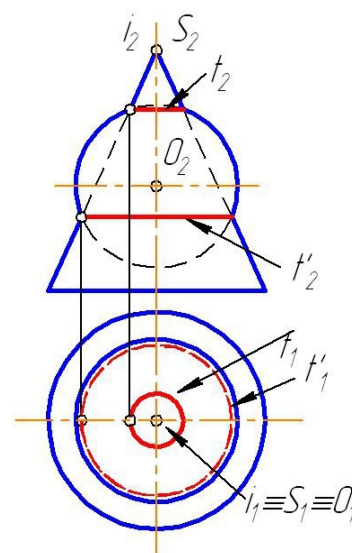


Рис. 2.49

Для точности построения линии пересечения необходимо построить промежуточные точки сечения. Т.к. обе поверхности содержат семейство параллелей, параллельных горизонтальной плоскости проекций, промежуточные находят с помощью дополнительных горизонтальных плоскостей уровня, пересекающих сферу и конус по этим параллелям (рис. в).

После определения всех точек линии пересечения, их проекции с учетом видимости соединяют между собой плавной линией.

Линия пересечения сферы с поверхностью проецируется на одну из плоскостей проекций в виде отрезков, а на другую – в виде окружности.

В качестве секущих сфер могут быть использованы концентрические или эксцентрические сферы.

**Пример 4.** Построить линию пересечения конуса и цилиндра методом концентрических сфер<sup>12</sup>.

Концентрические сферы могут быть использованы при одновременном выполнении трех условий:

1. Пересекающиеся поверхности – поверхности вращения.
2. Оси поверхностей пересекаются.
3. Поверхности имеют общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

Промежуточные точки сечения находятся с помощью секущих сфер, центр которых располагается в точке пересечения осей вращения поверхностей (рис. 2.50). Секущие сферы соосны с поверхностями конуса и цилиндра, а следовательно, пересекают их по параллелям. Сфера минимального радиуса проводится так, чтобы она касалась одной поверхности, а вторую пересекала. В данной задаче наименьшая сфера касается поверхности конуса по параллели  $p$  и пересекает цилиндр по параллели  $t$ . В месте пересечения этих параллелей находятся точки, принадлежащие линии пересечения  $D, D'$ .

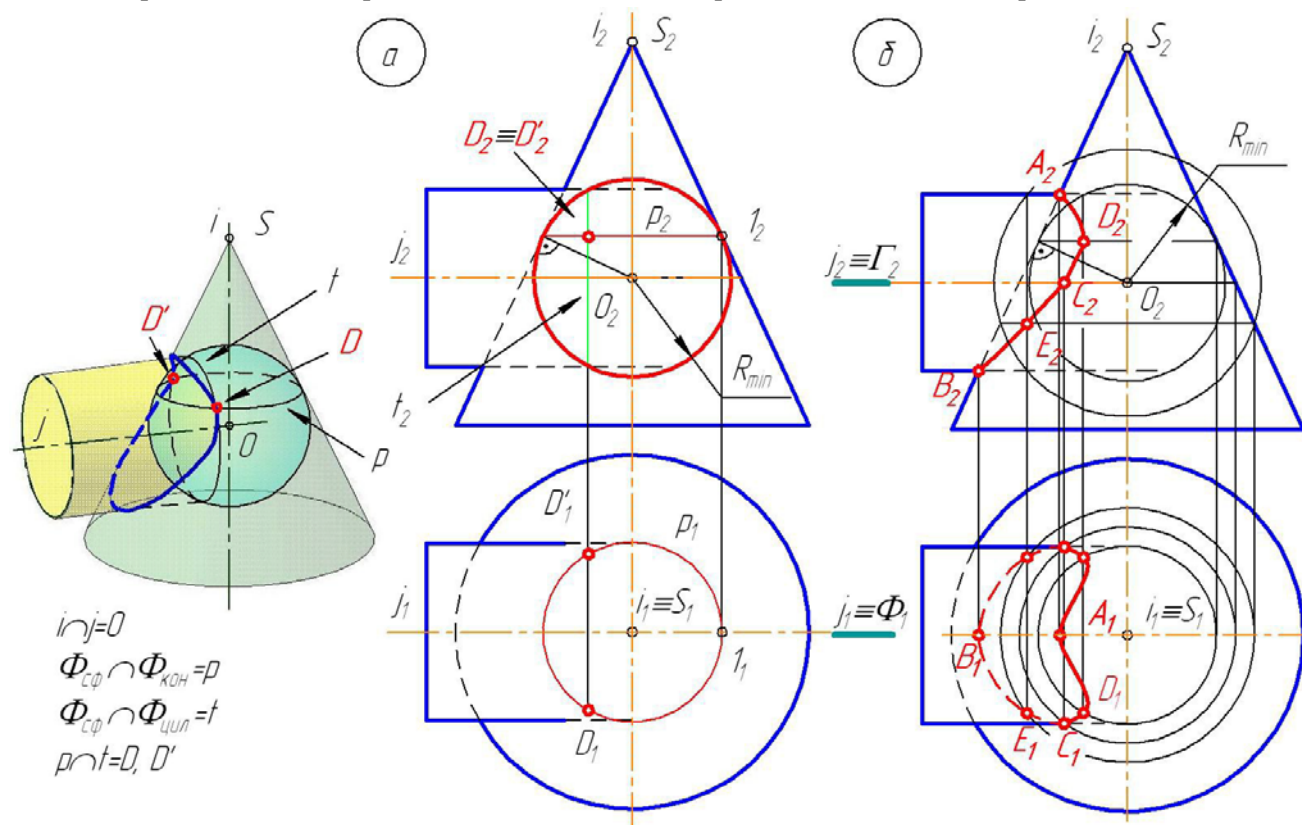


Рис. 2.50

Горизонтальные проекции точек находят по принадлежности их поверхности конуса, т.к. его параллель проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения

Для более точного построения проекций линии пересечения достаточно построить еще пару промежуточных точек. Радиус второй секущей сферы выбирается произвольно, но так, чтобы ее фронтальный очерк проходил выше проекции точки  $A$  (рис. 2.50 б).

«Крайние» точки сечения – высшая и низшая, ближайшая и наиболее удаленная точки (точки, лежащие на границе видимости относительно горизонтальной плоскости проекций) определяются с помощью плоскостей уровня (рис. 2.50 б).

<sup>12</sup> В задаче используется графическое условие примера 1 (рис. 2.46)

**Пример 5.** Построить линию пересечения тора и конуса методом эксцентрических сфер.

Метод секущих эксцентрических сфер может быть применен при соблюдении следующих условий:

1. Одна из пересекающихся поверхностей циклическая, вторая – поверхность вращения.
2. Поверхности должны иметь общую плоскость симметрии, параллельную одной из плоскостей проекций.

Сущность метода заключается в том, что подбирается сфера, пересекающая обе заданные поверхности по окружностям. Точки пересечения этих окружностей будут являться искомыми точками линии сечения.

Заданные поверхности (рис. 2.51) располагаются так, что их оси – скрещивающиеся прямые ( $i \perp \Pi_1, j \perp \Pi_2$ ), а фронтальная плоскость  $\Phi$  ( $\Phi_1$ ) является плоскостью симметрии. С помощью этой плоскости находятся высшая и низшая точки сечения (рис. 2.51 а).

Для построения промежуточных точек необходимо через ось тора провести фронтально-проецирующую плоскость  $\Lambda$  ( $\Lambda_1$ ), пересекающую тор по образующей-окружности  $l$  (рис. 2.51 б). Центр сечения (точка  $O$ ) располагается на направляющей торовой поверхности – окружности  $a$ .

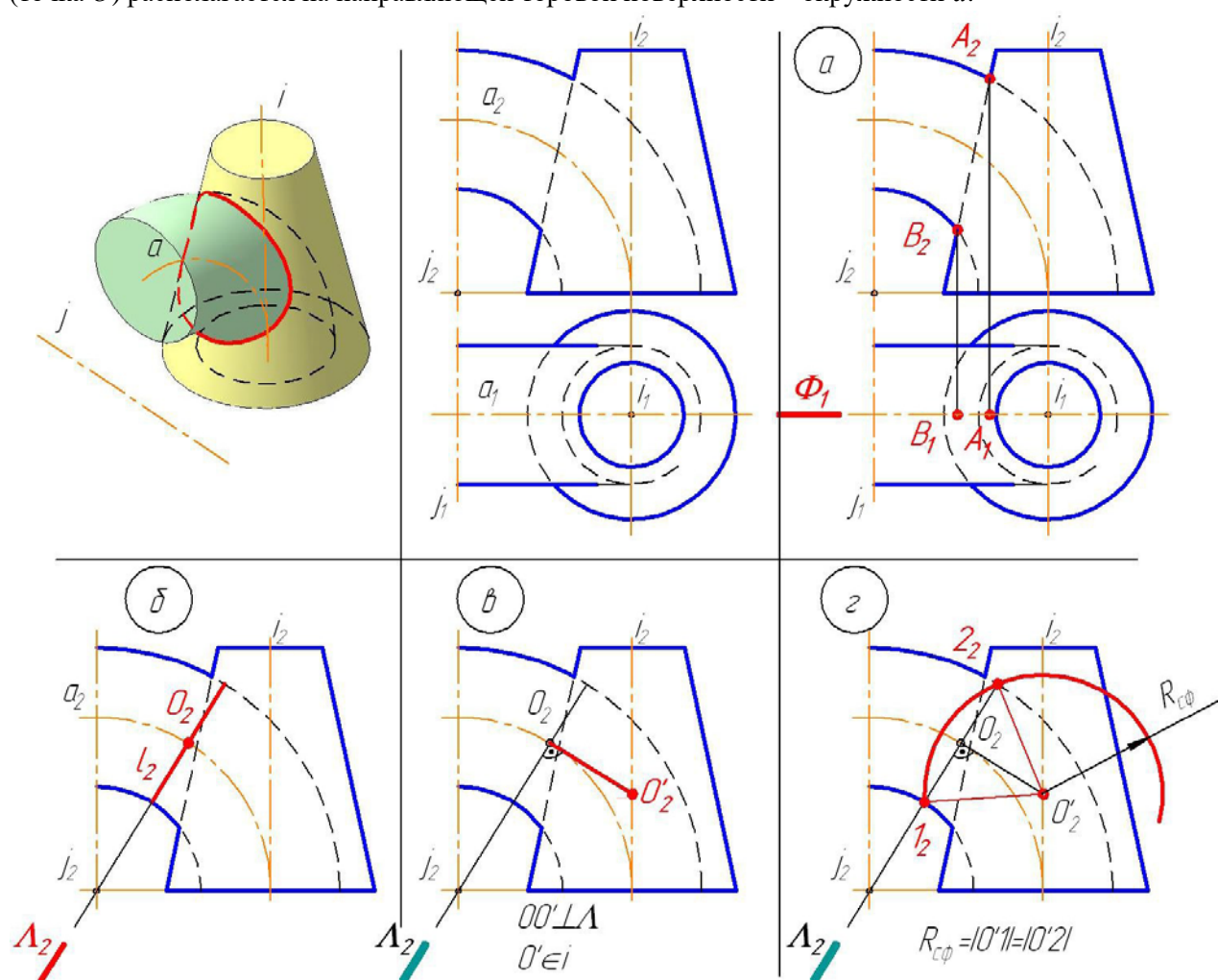


Рис. 2.51

Далее необходимо определить центр секущей сферы, пересекающей тор по полученной линии пересечения  $l$ . Центр сферы должен располагаться на оси вращения второй поверхности – усеченного конуса. Из центра сечения тора (точки  $O$ ) строится перпендикуляр к плоскости  $\Lambda$ , пересекающий ось  $i$  в точке  $O'$  (рис. 2.51 в). Радиус сферы подбирается таким образом, чтобы она пересекла тор по окружности  $l$ .



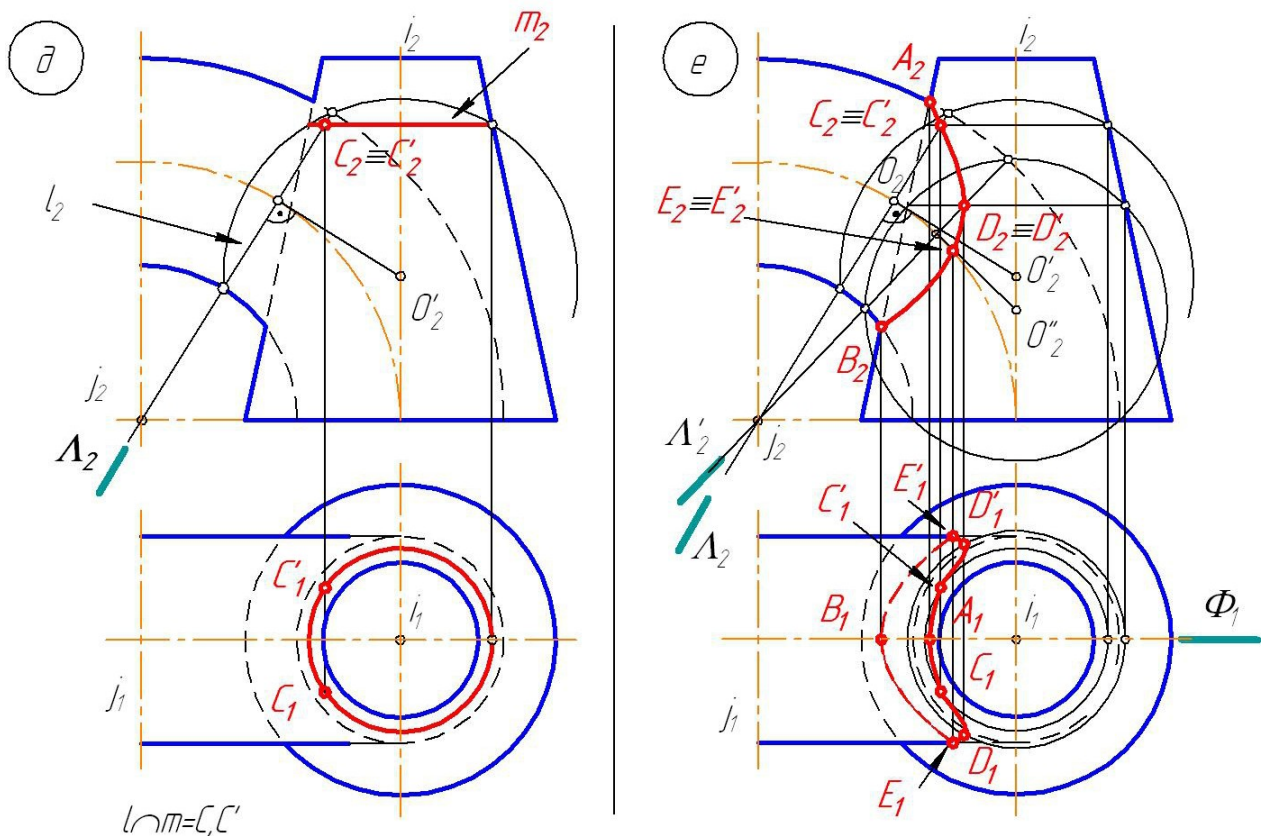


Рис. 2.52

Полученная сфера пересекает конус по параллели  $m$ . На пересечении двух окружностей (параллели конуса и образующей тора) находятся искомые точки  $C$  и  $C'$ . Т.к. параллель конуса проецируется на горизонтальную плоскость проекций без искажения, горизонтальные проекции точек линии пересечения строятся по принадлежности их поверхности конуса (рис. 2.52 д).

Вторая пара промежуточных точек  $D, D'$  находится аналогично (рис. 2.52 е).

Видимость линии пересечения относительно горизонтальной плоскости проекций в данном случае определяют точки, лежащие на горизонтальных очерковых параллелях тора. Местоположения их определяется приближенно: строится фронтальная проекция линии пересечения, находятся фронтальные проекции точек границы видимости, затем по линиям связи на горизонтальном очерке тора определяются их горизонтальные проекции (рис. 2.52).

### Вопросы для самостоятельного контроля знаний

1. Каков алгоритм нахождения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей?
2. Какие точки, принадлежащие линии пересечения следует находить в первую очередь?
3. Какие точки линии пересечения называются границами видимости?
4. Какие поверхности или плоскости можно применять при определении точек линии пересечения поверхностей. На чем основывается выбор той или иной поверхности-посредника?
5. В чем заключается способ дополнительных секущих плоскостей?
6. Какие теорему и свойство используют при построении линии пересечения способом секущих сфер?
7. При соблюдении каких условий можно применять способ дополнительных секущих концентрических или эксцентрических сфер?
8. По какому принципу следует выбирать дополнительную сферу, имеющую минимальный радиус?
9. По каким линиям сфера пересекается с соосными с ней поверхностями вращения и как эти линии проецируются на плоскости проекций?
10. В каких случаях можно не использовать поверхности-посредники и на чем это основывается?
11. Каковы частные случаи построения линии пересечения поверхностей?
12. При каких условиях линия пересечения поверхностей второго порядка распадается на две плоские кривые?



### 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ

#### Теоретическая часть

**Развертка** – плоская фигура, получаемая в результате совмещения поверхности геометрического тела с плоскостью.

Развертки, в зависимости от вида развертываемой поверхности, могут быть точные, приближенные и условные.

Точные развертки можно построить для поверхностей, которые совмещаются с плоскостью без образования складок и разрывов (**развертываемые поверхности**). К развертываемым поверхностям относятся линейчатые поверхности, две смежные образующие которых параллельны или пересекаются (многогранники, конусы, цилиндры, торсы).

Существуют различные графические способы построения разверток: способ раскатки, нормального сечения, треугольников.

При построении приближенных и условных разверток используют аппроксимацию одной поверхности другой.

Для построения полной развертки поверхности необходимо знать длину образующих или ребер (в зависимости от вида пересекаемой поверхности), натуральную величину основания поверхности, а для построения отсеченной части поверхности требуется еще определить натуральную величину сечения.

Натуральная величина сечения может быть определена различными способами преобразования КЧ, в частности методом замены плоскостей проекций (третья и четвертая основные задачи начертательной геометрии) или вращением вокруг линии уровня. Если линия сечения поверхности плоскостью была определена общим методом, натуральную величину сечения целесообразно определять вращением вокруг линии уровня. Если ранее при определении точек сечения был использован метод замены плоскостей проекций, рационально использовать этот метод и для определения натуральной величины сечения. Метод замены плоскостей проекций также удобно использовать для определения натуральной величины сечения, если заданная секущая плоскость – плоскость частного положения.

Развертка обозначается знаком «Развернуто», контур обводится типом линии «Основная», линии сгиба чертятся типом линии «Штрих-пунктирная с двумя точками» (ГОСТ 2.302.68).

#### 3.1. Развертка многогранников

Развертка многогранников представляет собой плоскую фигуру, состыкованную из граней. Поэтому построение развертки боковой поверхности призм и пирамид сводится к нахождению натуральных величин отдельных их граней или ребер. Эти величины в общем случае могут быть найдены рассмотренными ранее способами.<sup>13</sup>

Если строится развертка отсеченной части многогранника, последовательность расположения граней должна быть выбрана таким образом, чтобы развертка не распадалась на отдельные составные части.

**Пример 1.** Построение развертки прямой проецирующей призмы.

Т.к. у прямой призмы боковые грани – прямоугольники, для построения ее боковой поверхности достаточно знать ее высоту (длину ребер) и величину сторон основания.

На рис. 3.1. задано графическое условие прямой призмы, пересеченной фронтально-проецирующей плоскостью (линия сечения – пятиугольник  $ABDEG$ ). Основание призмы параллельно профильной плоскости проекций, следовательно, известны длины сторон основания – они проецируются в натуральную величину на эту плоскость проекций. Также известна высота призмы (ребра призмы

<sup>13</sup> См.: Методы преобразования комплексного чертежа, метод прямоугольного треугольника.

параллельны горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций). Для построения отсеченной части призмы требуется натуральная величина сечения, она в данной задаче определена методом замены плоскостей проекций (IV основная задача начертательной геометрии, рис. 3.2).

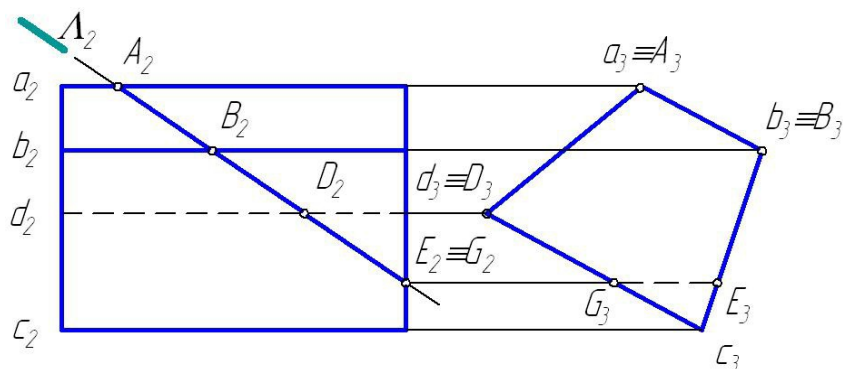


Рис. 3.1

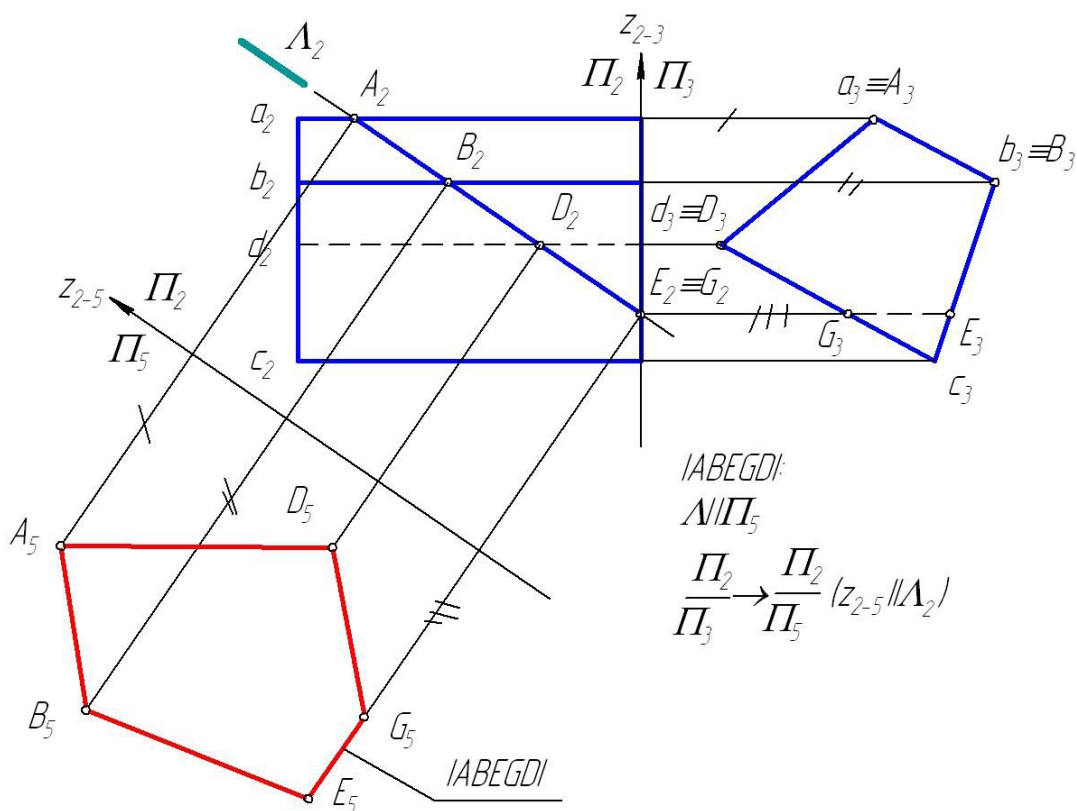


Рис. 3.2

При построении развёртки данной призмы боковую поверхность следует условно разрезать по ребру, на котором нет вершин сечения (ребру  $c$ ). На произвольной горизонтальной линии последовательно откладываются натуральные величины сторон основания призмы. Далее через полученные точки основания задаются направления ребер и строятся боковые грани призмы (рис. 3.3 б). К развёртке боковой поверхности пристраиваются верхнее и нижнее основание. Так как основание пирамиды – четырехугольник, его, при построении на развёртке, следует условно разделить на треугольники (метод триангуляции, рис. 3.3 б).

Для построения отсеченной части пирамиды, на развёртке откладывается длина отсеченных ребер и пристраивается сечение.

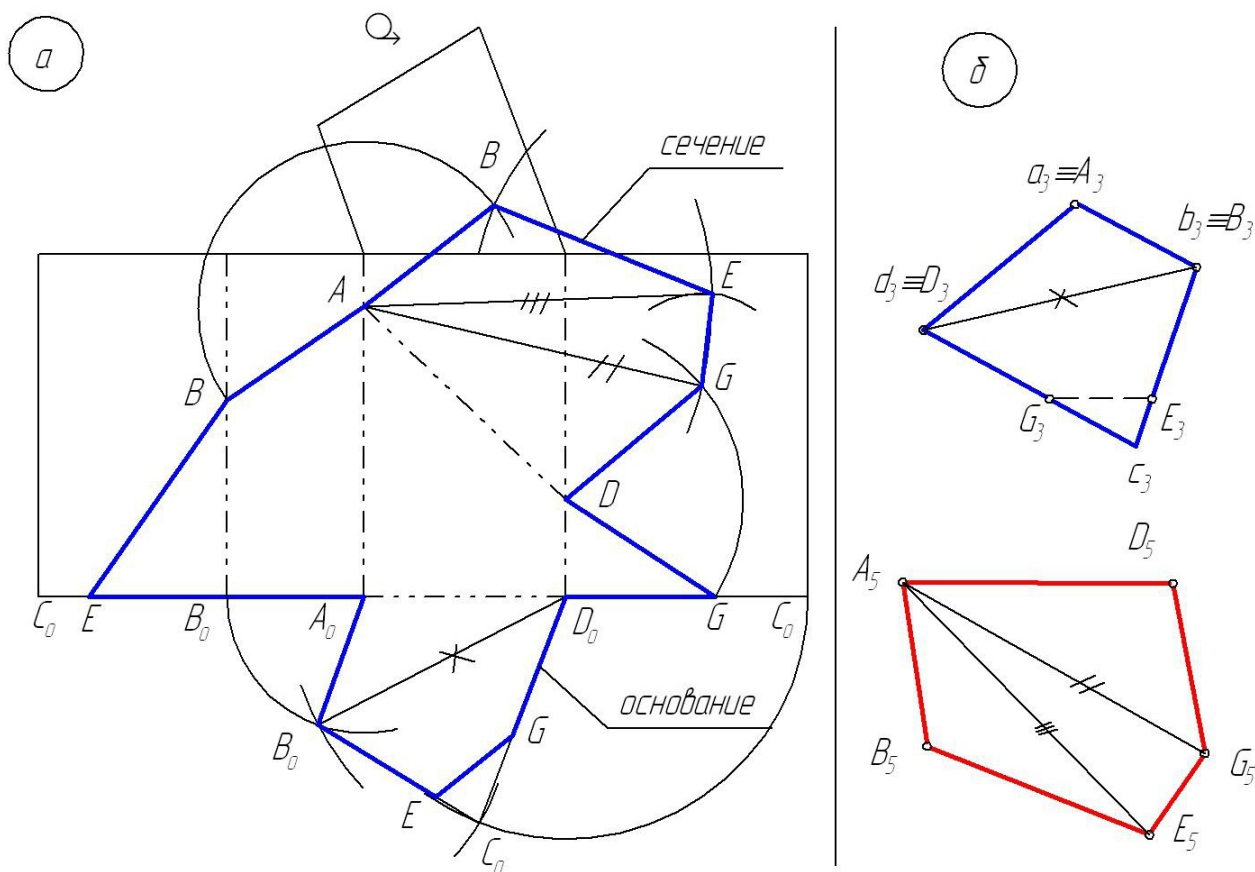


Рис. 3.3

**Пример 2.** Построить развертку боковой поверхности наклонной призмы способом раскатки.

**Способ раскатки** при построении развертки призмы применяется в том случае, если на КЧ ребра призмы являются прямыми уровнями, а основание параллельно одной из плоскостей проекций.

Суть способа раскатки заключается в том, что грань призмы разворачивается вокруг своего ребра до положения, когда она становится плоскостью уровня.

На рисунке 3.4 задано графическое условие призмы, у которой ребра параллельны фронтальной плоскости проекций, а основание – горизонтальной.

Т.к. ребра призмы – фронталы, в качестве плоскости развертки выбрана фронтальная плоскость проекций.

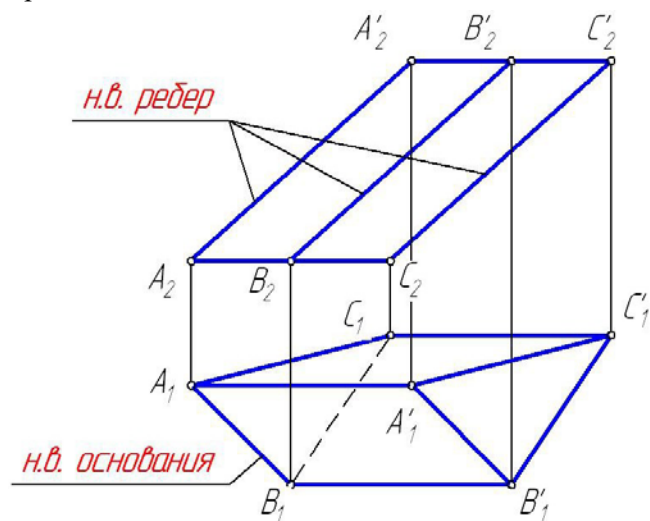


Рис. 3.4

#### Порядок построения развертки методом раскатки

1. Боковая поверхность призмы условно разрезается по очерковому ребру  $AA'$ .
2. Грань  $AA'B'B$  разворачивается вокруг этого ребра до совмещения с плоскостью развертки (фронтальной плоскости проекций).<sup>14</sup> При этом точки  $B, B'$  вращаются в плоскостях, перпендикулярных ребру  $AA'$  (рис. 3.5 а).
3. Аналогично, последовательным вращением вокруг своих ребер, строятся оставшиеся грани (рис. 3.5 б).

<sup>14</sup> См. Методы преобразования КЧ. Вращение вокруг линии уровня.

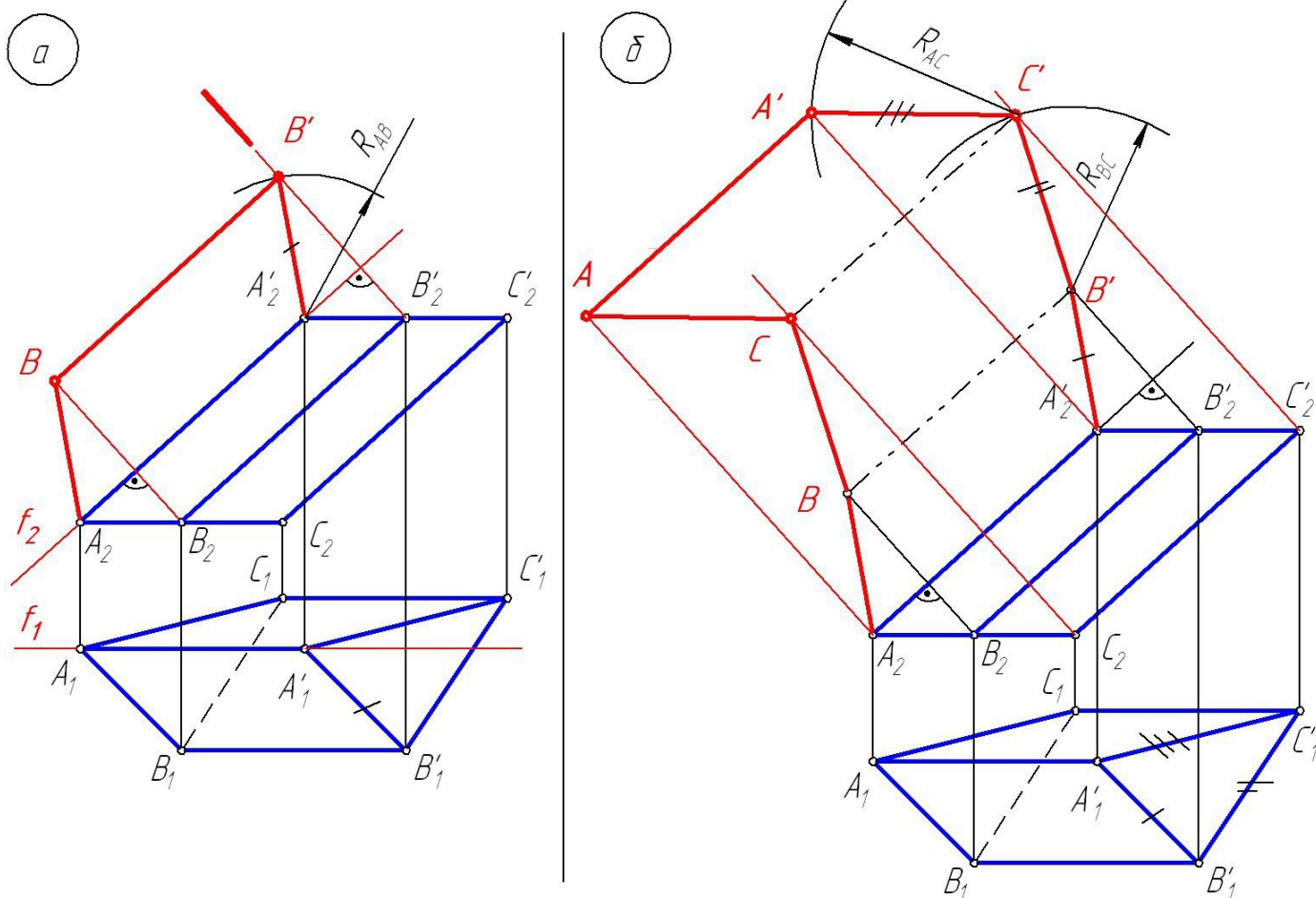


Рис. 3.5

**Пример 3.** Построить развертку наклонной призмы методом нормального сечения (рис. 3.6).

Для построения полной развертки наклонной призмы кроме натуральной величины основания и длины ребер, необходимо знать расстояние между ними.

**Способ нормального сечения** применяется для построения развертки наклонных призм, когда неизвестно расстояние между ребрами. Это расстояние определяется с помощью секущей плоскости, перпендикулярной ребрам призмы.

На рисунке 3.6 графическое условие задано таким образом, что основание пирамиды расположено параллельно горизонтальной плоскости проекций, следовательно, на эту плоскость проекций проецируется в натуральную величину.

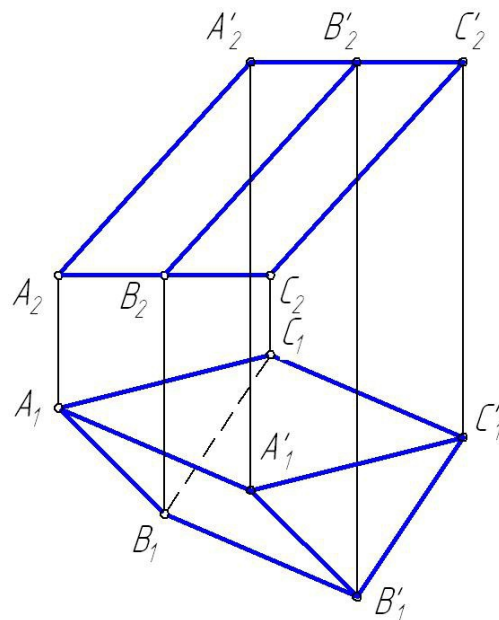


Рис. 3.6

### Порядок построения развертки методом раскатки

1. Натуральная величина ребер призмы определяется методом замены плоскостей проекций (I основная задача начертательной геометрии). Ребра занимают общее положение относительно горизонтальной и фронтальной плоскостей проекций. При замене фронтальной плоскости проекций на плоскость, параллельную ребрам, они преобразовываются в линии уровня и, следовательно, проецируются на новую плоскость в натуральную величину (рис. 3.7 а).

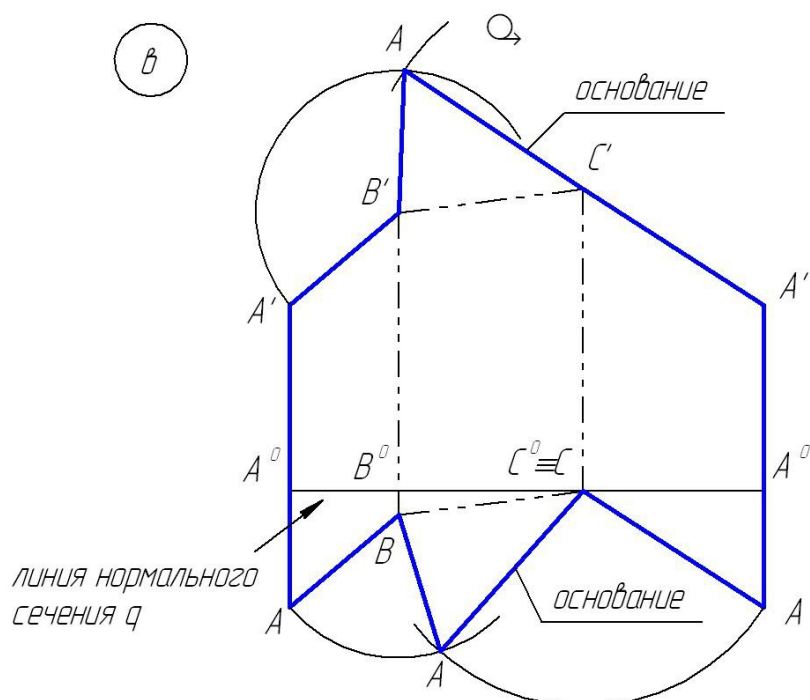
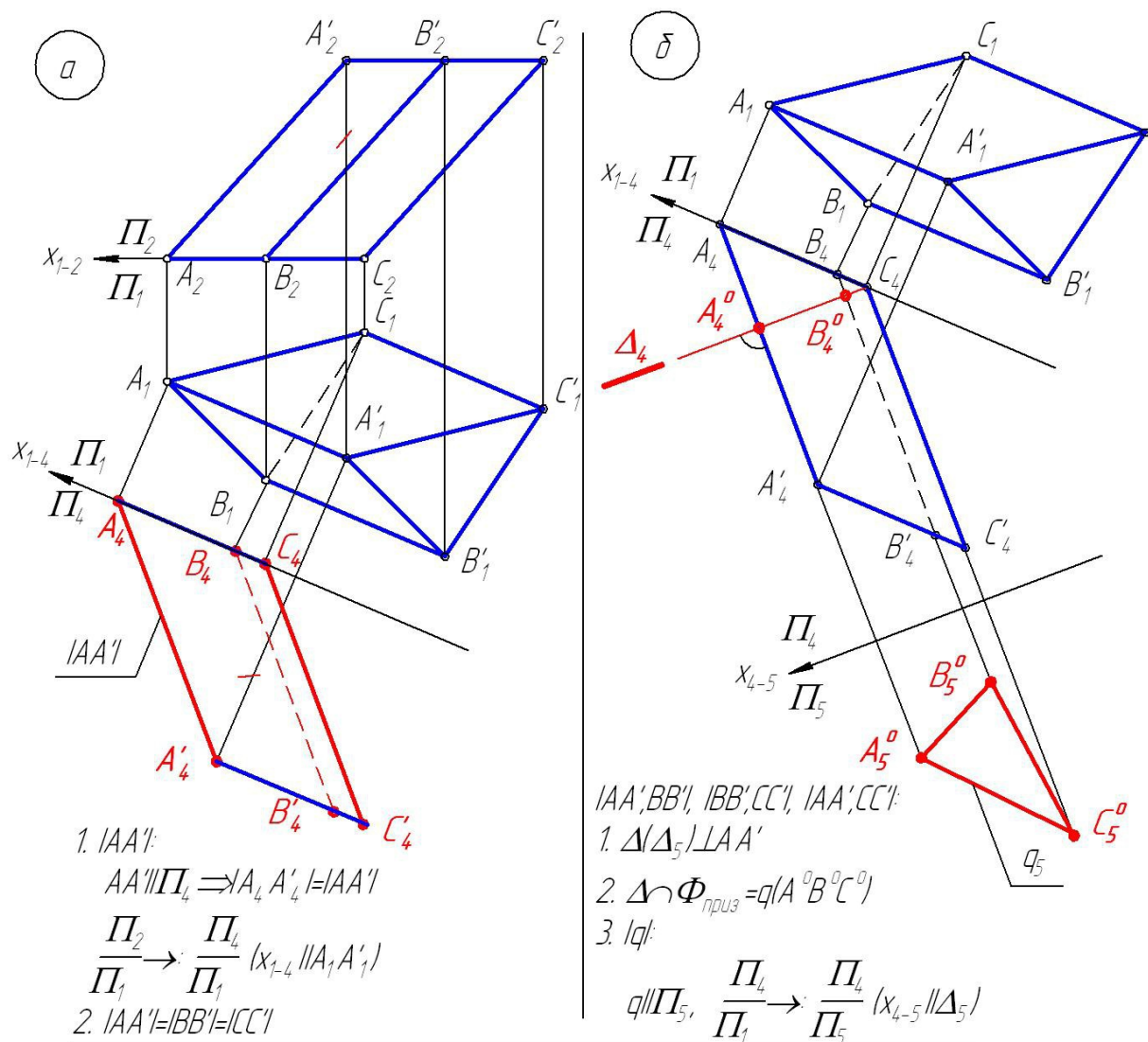


Рис. 3.7



2. Расстояние между ребрами наклонной призмы определяет нормальное сечение (сечение плоскостью, перпендикулярной ребрам). Для определения этого нормального сечения через одну из вершин основания призмы, например точку  $C$  (рис. 3.7 б), необходимо провести секущую плоскость, перпендикулярную ребрам. Далее натуральная величина нормального сечения определяется с помощью второй замены плоскостей проекций (II основная задача начертательной геометрии).
3. При построении развертки боковой поверхности наклонной призмы линия нормального сечения разворачивается в горизонтальную линию (рис. 3.7 в).
4. Через точки вершин сечения вертикально задаются направления ребер.
5. На направлениях ребер отмечаются точки верхнего и нижнего оснований призмы с учетом расстояния их от точек вершин нормального сечения.
6. Полученные точки соединяются между собой прямыми линиями. Линии сгиба развертки чертятся штрих-пунктирными линиями с двумя точками.
7. К полученной развертке боковой поверхности пристраиваются методом засечек верхнее и нижнее основание призмы.

**Пример 4.** Построить развертку нижней отсеченной части пирамиды <sup>15</sup>.

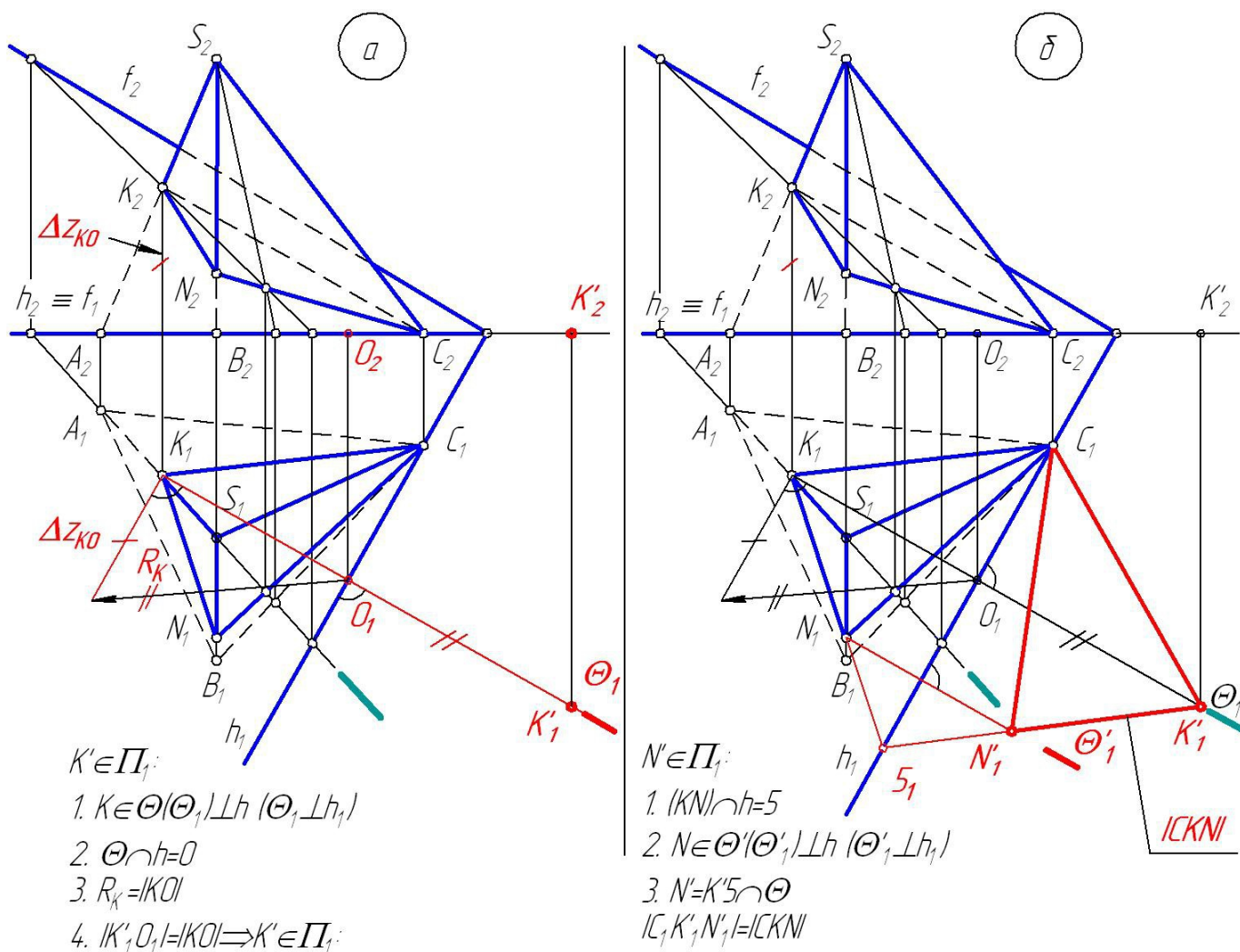


Рис. 3.8

Для построения развертки отсеченной части пирамиды необходимо знать длину ее ребер, длину сторон основания, а также натуральную величину сечения.

<sup>15</sup> Основывается на ранее решенной задаче на определение линии пересечения плоскости с пирамидой (рис. 2.8).

Длины сторон основания пирамиды в задаче известны изначально, т.к. пирамида стоит на горизонтальной плоскости проекций, следовательно, их горизонтальные проекции равны натуральной величине.

При определении натуральной величины сечения методом вращения вокруг линии уровня его следует развернуть вокруг оси вращения в положение, параллельное плоскости проекций. Т.к. в данной задаче ось вращения (горизонтали  $h$ ) лежит в горизонтальной плоскости проекций, сечение  $\gamma(\triangle SKN)$  совмещается с этой плоскостью проекций.

Все точки, принадлежащие линии сечения, кроме неподвижной точки  $S$ , вращаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Для нахождения натуральной величины сечения достаточно на КЧ определить новое положение только точки  $K$ . Она вращается вокруг горизонтали в горизонтально-проецирующей плоскости  $\odot$ . Траектория движения точки – дуга окружности, натуральная величина радиуса которой определяется методом прямоугольного треугольника (рис. 3.8 а). Точка  $K$  (положение точки  $K'$ ) повернется в горизонтальную плоскость проекций, когда на КЧ на эту плоскость проекций отрезок  $OK$  спроецируется в натуральную величину.

Чтобы найти третью вершину линии сечения, точку  $N$ , необходимо продолжить сторону треугольника до пересечения с осью вращения. Плоскость  $\odot'$  – плоскость траектории движения искомой точки (рис. 3.8 б).

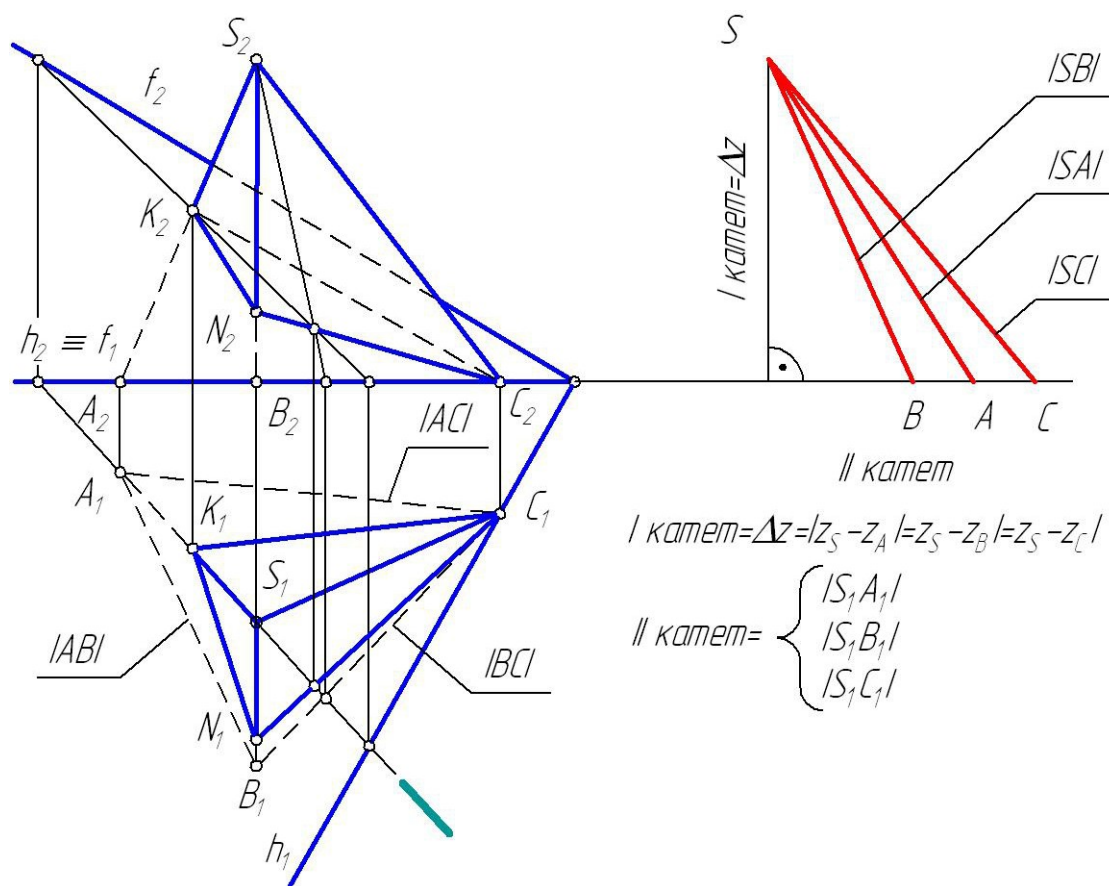


Рис. 3.9

Длины сторон пирамиды находятся методом прямоугольного треугольника (рис. 3.9). Т.к. разность высот от концов отрезка до горизонтальной плоскости проекций у всех трех ребер одна и равна высоте пирамиды, катет прямоугольного треугольника, равный этой величине, целесообразней начертить в стороне от изображения, правее фронтальной проекции пирамиды. Второй катет равен длинам горизонтальных проекций ребер. Для определения натуральной величины отрезков  $AK$  и  $BN$  необходимо провести горизонтальные вспомогательные линии от проекций точек  $K$  и  $N$  до пересечения с со-

ответствующими гипотенузами прямоугольных треугольников.

На натуральных величинах ребер отмечается местоположение вершин линии сечения (рис. 3.10).

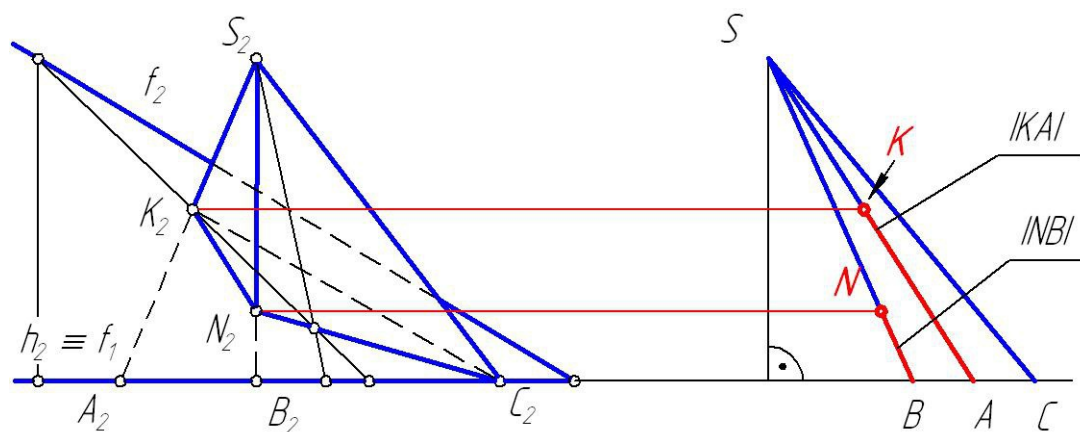


Рис. 3.10

Развертка строится с использованием метода засечек (рис. 3.11). Боковую сторону пирамиды следует условно разрезать по ребру  $SC$  чтобы боковая поверхность не распадалась на составные части. Линии сгиба развертки изображаются «штрих-пунктирной линией с двумя штрихами». Контур изображается «сплошной основной» линией в соответствии с ГОСТ 2.303-68. Развертка обозначается знаком «Развернуто».

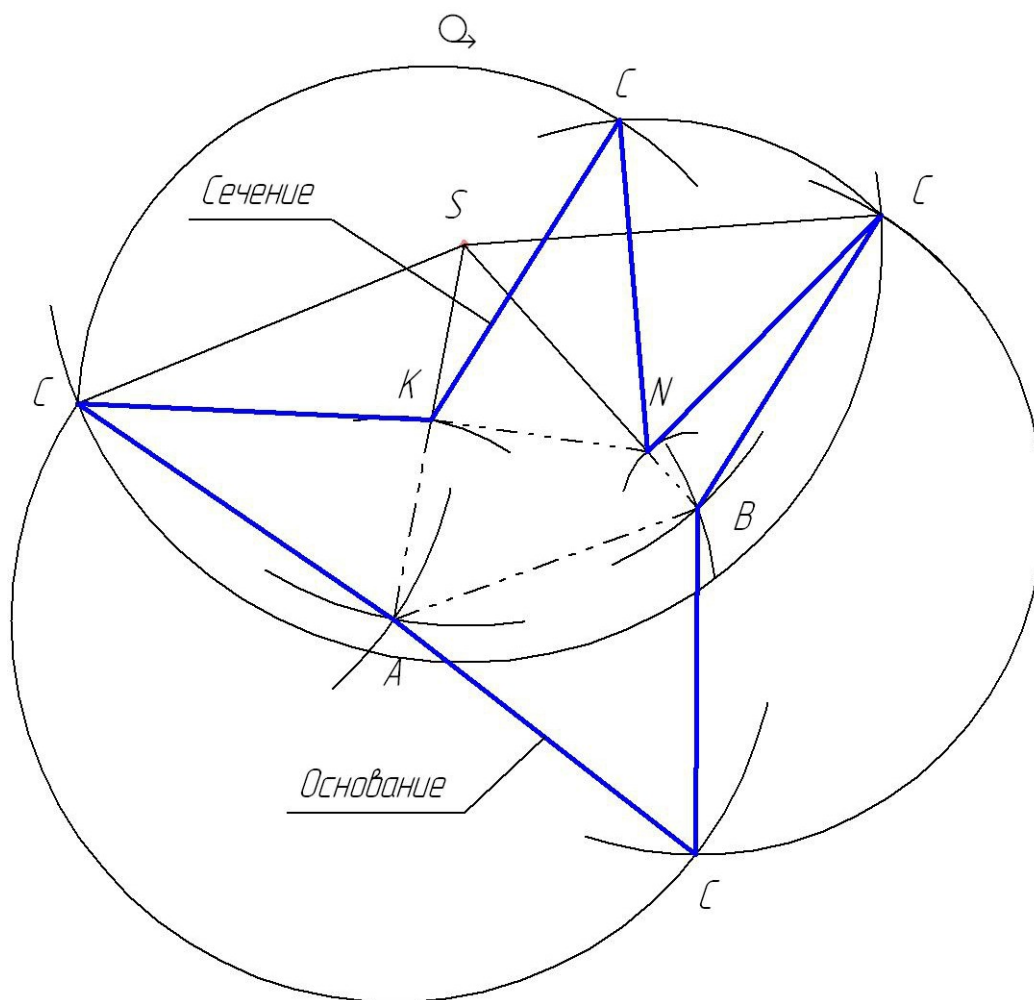


Рис. 3.11

### 3.2. Развертка поверхностей вращения

Для линейчатых поверхностей вращения можно построить точные или приближенные развертки.

Точные развертки можно построить, когда по формулам для цилиндров рассчитывается длина окружности основания (рис. 3.12), а для конусов – угол при вершине кругового сектора (рис. 3.13).

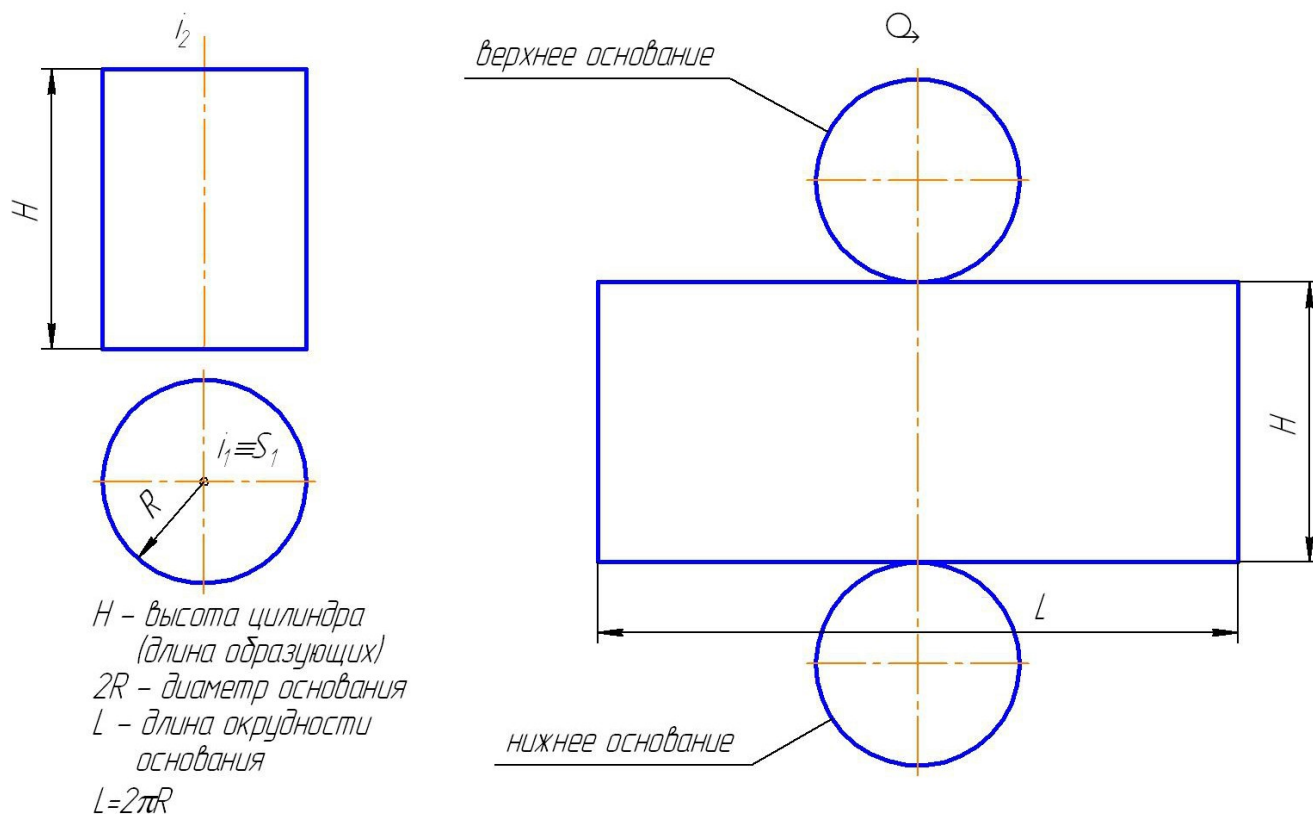


Рис. 3.12

**Пример 1.** Построить точную развертку боковой поверхности кругового конуса и определить на ней точку  $A$ , принадлежащую поверхности.

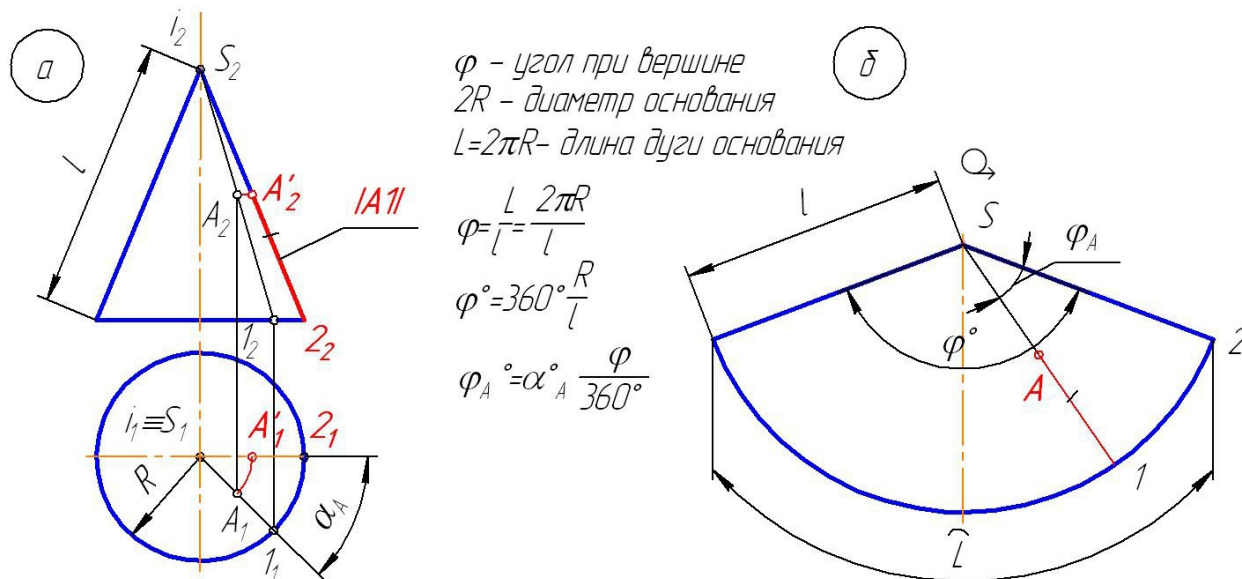


Рис. 3.13

Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор с радиусом дуги окружности равным длине образующей и углом у вершины  $\Phi$  (рис. 3.13).

Для построения на развертке точки  $A$ , принадлежащей поверхности конуса, необходимо:

1. На развертке построить образующую, которой принадлежит данная точка ( $SI$ ). Для этого по формуле определяется угол между образующей  $SI$  и образующей, по которой «разрезана» поверхность (угол  $\Phi_A$ ).
2. Определить расстояние от точки  $A$  до основания конуса, измеренное по образующей  $SI$ . Расстояние определяется вращением вокруг проецирующей прямой (оси  $i$ ). Отрезок  $AI$  разворачивается в положение, параллельное фронтальной плоскости проекций, т.о. проецируется на нее в натуральную величину.

**Пример 2.** Построить приближенную развертку отсеченной части поверхности цилиндра.

Приближенные развертки поверхностей вращения (цилиндров и конусов) выполняются аналогично разверткам призматических и пирамидальных поверхностей. При этом поверхность вращения заменяется (аппроксимируется) на вписанную в нее гранную поверхность. При построении приближенной развертки цилиндра в него вписывается призма с 8-ми или 12-ти угольным основанием.

На рис. 3.14 задан прямой круговой цилиндр, пересеченный фронтально-проецирующей плоскостью.

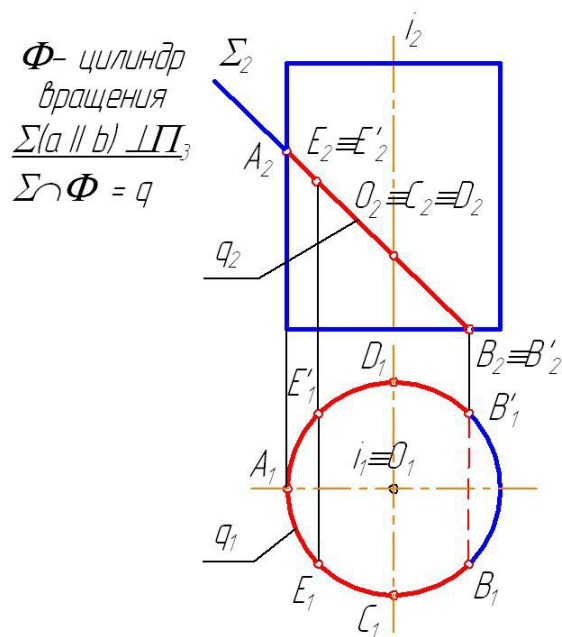


Рис. 3.14

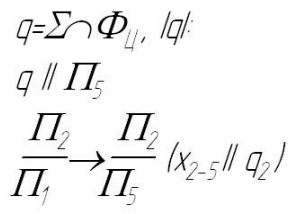
#### Порядок построения приближенной развертки цилиндра

1. Для построения развертки, кроме длин отсеченных образующих, проецирующихся в натуральную величину на фронтальную плоскость проекций, и натуральной величины основания, проецирующегося без искажения на горизонтальную плоскость проекций, необходимо знать натуральную величину сечения. В данном случае ее можно найти двумя способами: заменой плоскостей проекций (рис. 3.15) и вращением вокруг проецирующей прямой (рис. 3.16).
2. Прямой круговой цилиндр заменяется на вписанную правильную 8-ми гранную призму. На КЧ равномерно размечаются точки ее основания (рис. 3.17 а). При разметке следует учитывать, что боковую поверхность следует «разрезать» таким образом, чтобы она

не распадалась на отдельные составляющие и представляла собой симметричную фигуру. В данном случае поверхность разрезана по образующей, противоположной образующей с наивысшей точкой сечения.

3. На свободном месте чертежа строится приближенная развертка боковой поверхности цилиндра по натуральным величинам образующих (высота цилиндра) и сторонам основания вписанной в цилиндр призмы (метод хорд). К центральной образующей сверху и снизу пристраиваются основания.
4. На соответствующих образующих отмечаются точки линии сечения.
5. К точке линии сечения, лежащей на центральной образующей, пристраивается сечение.
6. Окончательно оформляется чертеж развертки: обводятся линии с учетом типа и толщины, подписываются составные части развертки поверхности, чертеж обозначается специальным знаком «Развернуто» (рис. 3.17 б).





1.  $j(BB') \perp \Pi_2$   
 2.  $A \in \Lambda(\Lambda_1) \perp j$   
 3.  $\Lambda \cap j = O'$   
 4.  $R_A = |AO'|$   
 5.  $A'' \in \Pi_1$

Рис. 3.16

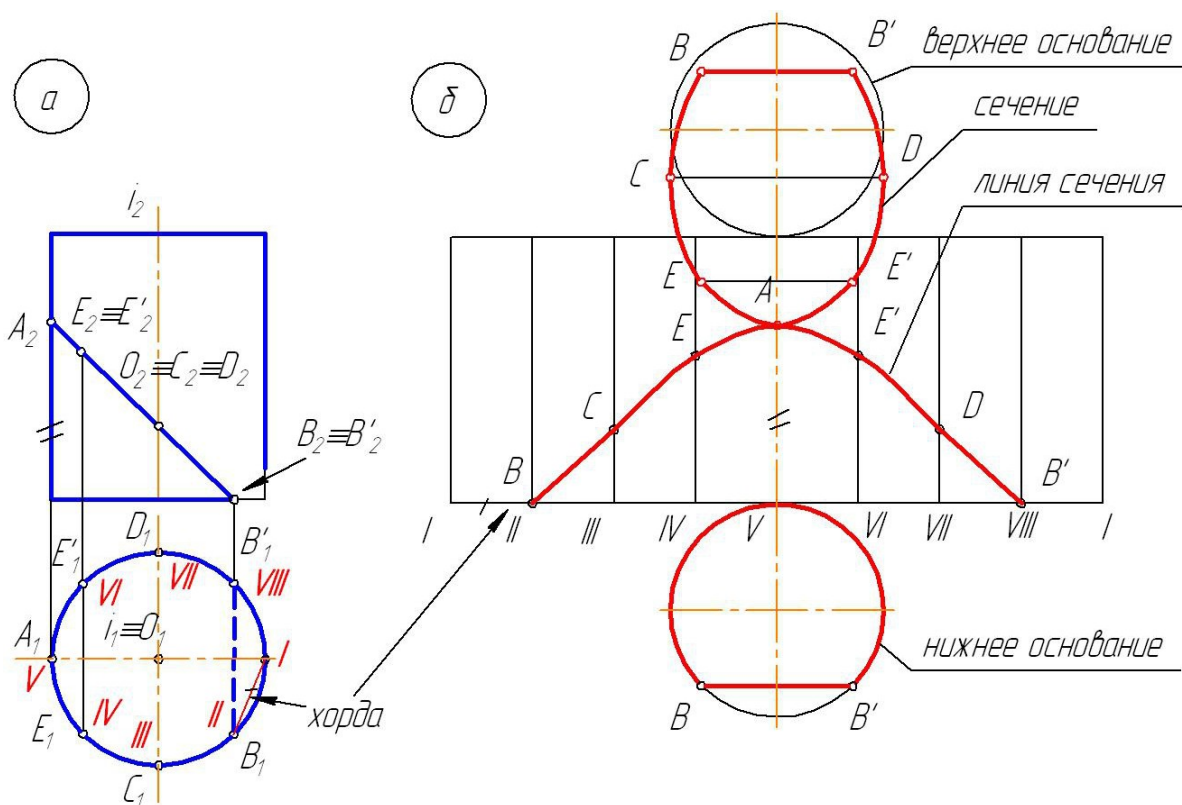


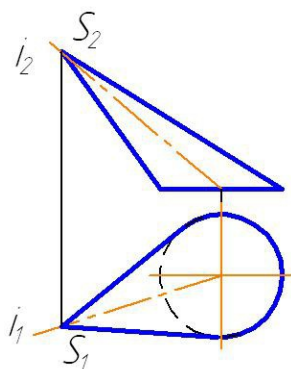
Рис. 3.17

### Вопросы для самостоятельного контроля знаний

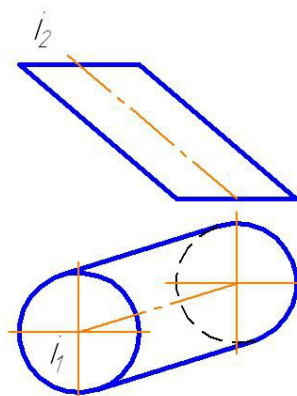
1. Что называется разверткой?
2. Какие существуют способы построения разверток?
3. Для каких поверхностей можно построить точные развертки, а для каких приближенные?
4. Что надо знать, чтобы построить развертку способом треугольников?
5. Развертку каких поверхностей можно построить способом раскатки или нормального сечения?
6. Каким способом можно определить натуральную величину сечения поверхности плоскостью?
7. Что называется нормальным сечением?

### Задачи для самоподготовки

**Задача 1.** Построить развертку эллиптического конуса методом триангуляции.



**Задача 2.** Построить развертку эллиптического цилиндра методом раскатки.



**Задача 3.** Построить развертку эллиптического цилиндра методом нормального сечения (использовать графическое условие предыдущей задачи).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии: Учебн. Пособие для вузов / Под ред. В.О. Гордона и Ю.Б. Иванова. – М.: Высш. шк., 1998. – 272 с.
2. Лагерь А.И. Основы начертательной геометрии: Учебник / А.И. Лагерь, А.Н. Мота, К.С. Рушелюк. – М.: Высш. шк., 2005. – 281 с.
3. Нарова Л.Г. Начертательная геометрия: Учеб. Пособие для студ. техн. специальностей вузов / Л.Г. Нартова, В.И. Якунин. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 288 с.
4. Талалай П.Г. Компьютерный курс начертательной геометрии на базе КОМПАС-3D. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 608 с.
5. Фролов С.А. Начертательная геометрия: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2008. – 286 с
6. Савченко Н.В. Начертательная геометрия: конспект лекций / Н.В. Савченко Н.В. – Самара: Изд. СГАУ, 2011. – 80 с.
7. Савченко Н.В. Начертательная геометрия. Практические занятия: пособие для преподавателей / Н.В. Савченко, Г.И. Панова, В.В. Платонова – Самара: Изд. СГАУ, 2007. – 104 с.
8. Савченко Н.В. Сборник задач по начертательной геометрии. Ч. 1. Метрические и позиционные задачи. Методика решения метрических и позиционных задач, входящих в состав индивидуального задания: Учебное пособие / Н.В. Савченко – Самара: Изд. Самарского нац. исслед. ун. , 2017. – с.
9. Савченко Н.В. Сборник задач по начертательной геометрии. Ч. 2. Методы преобразования комплексного чертежа. Методика решения метрических и позиционных задач, входящих в состав индивидуального задания: Учебное пособие / Н.В. Савченко – Самара: Изд. Самарского нац. исслед. ун. , 2017. – с.
10. Сборник задач по начертательной геометрии. Ч. 4. База данных: учебн. пособие / [Н.В. Савченко и др.] – Самара: Изд. СГАУ, 2011. – 206 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ .....	3
1.1. Методика решения задач .....	3
1.2. Состав индивидуального задания .....	3
1.2. Порядок приема графических работ.....	3
1.3. Требования к оформлению графических работ.....	3
2. ПОВЕРХНОСТИ .....	9
2.1. Способы задания поверхности.....	9
2.2. Классификация поверхностей.....	10
Линейчатые и нелинейчатые поверхности.....	10
Винтовые поверхности .....	14
Гранные поверхности.....	16
Поверхности вращения .....	17
2.3. Принадлежность точки и линии поверхности .....	18
2.4. Пересечение поверхности плоскостью.....	23
2.5. Пересечение прямой с поверхностью.....	43
2.6. Пересечение многогранников .....	50
2.7. Пересечение поверхностей вращения .....	54
3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗВЕРТКА ПОВЕРХНОСТИ .....	63
3.1. Развертка многогранников .....	63
3.2. Развертка поверхностей вращения .....	71
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	75

Учебное издание

*Савченко Нелли Вячеславовна*

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.**

***Часть 2. Поверхности. Методика решения задач, входящих  
в состав графических работ***

*Учебное пособие*

*В авторской редакции*

Подписано в печать 25.12.2017. Формат 60х84 1/8.

Бумага офсетная. Печ. л. 9,75.

Тираж 25 экз. Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»

(Самарский университет)

443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского университета.

443086, Самара, Московское шоссе, 34.



